

高3数学α 数学Ⅲスタ演 9.数列の極限

1 [2013 関西学院大]

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 4n^3 + 6n^2 - n$ ($n \geq 1$) で表されるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$ を求めよ。
- (3) $T_n = \sum_{k=1}^n a_{2k}$ を求めよ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n}$ を求めよ。
- (4) $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ を求めよ。

2 [2015 東京電機大]

極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})}$ を求めよ。

3 [2012 京都大]

a が正の実数のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

4 [1999 名城大]

n が自然数で、 $x \geq 0$ であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+3} - 2x + 3}{x^n + 1}$ を求めよ。
- (2) 上の極限値を $f(x)$ とするとき、 $y = f(x)$ のグラフをかけ。

5 [1996 芝浦工業大]

極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \dots + \log \frac{n+1}{n} - \log n \right)$ を求めよ。

ただし、対数は自然対数である。

高3数学α 数学Ⅲスタ演 9.数列の極限

6 [2016 山口大]

n を自然数とする。

- (1) $a > 0$, $n \geq 3$ のとき, 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$(1+a)^n > \frac{1}{6} n(n-1)(n-2)a^3$$

- (2) $r > 1$ のとき, 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{r^n}$ を求めよ。

7 [2009 慶應義塾大]

実数 α に対して α を超えない最大の整数を $[\alpha]$ と書く。[] をガウス記号という。

- (1) 自然数 m の桁数 k をガウス記号を用いて表すと $k = [\sqrt[p]{\boxed{}}]$ である。

- (2) 自然数 n に対して 3^n の桁数を k_n で表すと $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = \sqrt[3]{\boxed{}}$ である。

8 [1999 早稲田大]

n を正の整数とし, $y = n - x^2$ で表されるグラフと x 軸とで囲まれる領域を考える。この領域の内部および周に含まれ, x , y 座標の値がともに整数である点の個数を $a(n)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $a(5)$ を求めよ。

- (2) \sqrt{n} を超えない最大の整数を k とする。 $a(n)$ を k と n の多項式で表せ。

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}$ を求めよ。

9 [2006 関西学院大]

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, は k が k 個 ($k=1, 2, 3, \dots$) ずつ続く数列である。この数列の第 n 項を a_n と表す。

- (1) $a_n = k$ となるような n の範囲を k を用いて表し, a_{100} の値を求めよ。

- (2) $\sum_{n=1}^{100} a_n$ の値を求めよ。

- (3) 初項から第 100 項 a_{100} までの間に, 偶数が何個現れるか答えよ。ただし, 同じ数が繰り返し現れる場合は重複して数える。例えば, 初項から第 8 項までの間には偶数が 4 個現れる。

- (4) 上の(1)で求めた不等式を用いて, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ を求めよ。

高3数学α 数学Ⅲスタ演 9.数列の極限

10 [2012 愛媛大]

数列 $\{a_n\}$ を $a_n = [\sqrt{n-1}]$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定める。ただし, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。また, 自然数 n に対して $S(n) = \sum_{k=1}^{n^2} a_k$ とおく。

- (1) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の値を求めよ。
- (2) $a_n = 5$ となる n はいくつあるか。
- (3) $S(n)$ を求めよ。
- (4) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n^3}$ を求めよ。