

## 高3数学α 数学Ⅲスタ演 9.数列の極限

---

1 [2013 関西学院大]

数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  が  $S_n = 4n^3 + 6n^2 - n$  ( $n \geq 1$ ) で表されるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。
- (2) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$  を求めよ。
- (3)  $T_n = \sum_{k=1}^n a_{2k}$  を求めよ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n}$  を求めよ。
- (4)  $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$  を求めよ。

2 [2015 東京電機大]

極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})}$  を求めよ。

3 [2012 京都大]

$a$  が正の実数のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$  を求めよ。

4 [1999 名城大]

$n$  が自然数で、 $x \geq 0$  であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+3} - 2x + 3}{x^n + 1}$  を求めよ。
- (2) 上の極限値を  $f(x)$  とするとき、 $y = f(x)$  のグラフをかけ。

5 [1996 芝浦工業大]

極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \cdots + \log \frac{n+1}{n} - \log n \right)$  を求めよ。

ただし、対数は自然対数である。

## 高3数学α 数学Ⅲスタ演 9.数列の極限

6 [2016 山口大]

$n$  を自然数とする。

- (1)  $a > 0$ ,  $n \geq 3$  のとき, 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$(1+a)^n > \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$$

- (2)  $r > 1$  のとき, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{r^n}$  を求めよ。

7 [2009 慶応義塾大]

実数  $\alpha$  に対して  $\alpha$  を超えない最大の整数を  $[\alpha]$  と書く。[ ] をガウス記号という。

- (1) 自然数  $m$  の桁数  $k$  をガウス記号を用いて表すと  $k = \left[ \frac{m}{10} \right] + 1$  である。

- (2) 自然数  $n$  に対して  $3^n$  の桁数を  $k_n$  で表すと  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = \frac{1}{\log 3}$  である。

8 [1999 早稲田大]

$n$  を正の整数とし,  $y = n - x^2$  で表されるグラフと  $x$  軸とで囲まれる領域を考える。この領域の内部および周に含まれ,  $x, y$  座標の値がともに整数である点の個数を  $a(n)$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $a(5)$  を求めよ。

- (2)  $\sqrt{n}$  を超えない最大の整数を  $k$  とする。  $a(n)$  を  $k$  と  $n$  の多項式で表せ。

- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}$  を求めよ。

9 [2006 関西学院大]

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, …… は  $k$  が  $k$  個 ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) ずつ続く数列である。この数列の第  $n$  項を  $a_n$  と表す。

- (1)  $a_n = k$  となるような  $n$  の範囲を  $k$  を用いて表し,  $a_{100}$  の値を求めよ。

- (2)  $\sum_{n=1}^{100} a_n$  の値を求めよ。

- (3) 初項から第 100 項  $a_{100}$  までの間に, 偶数が何個現れるか答えよ。ただし, 同じ数が繰り返して現れる場合は重複して数える。例えば, 初項から第 8 項までの間には偶数が 4 個現れる。

- (4) 上の (1) で求めた不等式を用いて,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  を求めよ。

10 [2012 愛媛大]

数列  $\{a_n\}$  を  $a_n = [\sqrt{n-1}]$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) で定める。ただし,  $[x]$  は  $x$  を超えない最

大の整数を表す。また, 自然数  $n$  に対して  $S(n) = \sum_{k=1}^{n^2} a_k$  とおく。

(1)  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  の値を求めよ。

(2)  $a_n = 5$  となる  $n$  はいくつあるか。

(3)  $S(n)$  を求めよ。

(4) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n^3}$  を求めよ。