高3数学β　2017スタンダード演習　42.ベクトルと空間図形(1)

$\boxed{1}$［2016 札幌医科大］

空間上の3点を A$(0,\ 1,\ 3)$，B$(-1,\ 3,\ 2)$，C$(1,\ 2,\ -1)$ とする。この3点を通る平面上に D$(a,\ b,\ -1)$ があるとき，a と b の関係式を求めよ。

$\boxed{2}$［2015 東京都市大］

四面体 OABC において，線分 OA の中点を D，線分 OB を $2:1$ に内分する点を E，線分 OC を $3:1$ に内分する点を F，△DEF の重心を G，直線 OG と平面 ABC の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=$ ア$\boxed{}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=$ イ$\boxed{}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=$ ウ$\boxed{}$ となる。

$\boxed{3}$［2012 北里大］

平行六面体 ABCD−EFGH において，辺 CG の G を越える延長上に CG＝3GP となるように点 P をとり，直線 AP と平面 BDE の交点を Q とする。このとき，

$2\overrightarrow{\mathrm{AP}}=$ ア$\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+$ イ$\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}+$ ウ$\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}$,

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=$ エ$\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+$ オ$\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}+$ カ$\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ となる。

$\boxed{4}$［1998 静岡大］

四面体 OABC とその内部の点 P があり，$2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+5\overrightarrow{\mathrm{BP}}+7\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ を満たしている.
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくとき

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{p}$, $\vec{a}$ で表せ.

(2)　$\vec{p}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.

(3)　直線 OP と底面 ABC との交点を T とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を $\vec{p}$ で表せ.

(4)　4つの四面体，すなわち，四面体 PABC, PBCO，PCOA，POAB の体積の比を求めよ.

$\boxed{5}$［1998 宮城教育大］

空間において原点をOとし，３点 A, B, C の位置ベクトルを
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-2, 1, 3)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-3, 1, 4)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(-3, 3, 5)$ とする.

(1)　2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを求めよ.

(2)　2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 ∠BAC の大きさを求めよ.

(3)　3点 A, B, C で定まる三角形 ABC の面積を求めよ.

(4)　2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に直交する単位ベクトルを求めよ.

$\boxed{6}$［2007 東京理科大］

Oを原点とする座標空間に，3 点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ \sqrt{5},\ 0)$，C$(0,\ 0,\ \sqrt{6})$ がある。原点 O から △ABC へ垂線を下ろし，△ABC との交点を H とする。

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{}$ である。　　(2)　$\cos\angle BAC=\boxed{}$ である。

(3)　△ABC の面積は $\boxed{}$ である。　　(4)　$|\overrightarrow{OH}|^2=\boxed{}$ である。

$\boxed{7}$［2008 一橋大］

正四面体 OABC の 1 辺の長さを 1 とする。辺 OA を $2:1$ に内分する点を P，辺 OB を $1:2$ に内分する点を Q とし，$0<t<1$ を満たす t に対して，辺 OC を $t:(1-t)$ に内分する点を R とする。

(1)　PQ の長さを求めよ。

(2)　△PQR の面積が最小となるときの t の値を求めよ。

$\boxed{8}$［2015 広島大］

(1)　空間内に 3 点 O，A，B があるとき，△OAB の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$

で与えられることを示せ。

(2)　空間内の 3 点 A$(1,\ 0,\ -1)$，B$(1,\ 1,\ 0)$，C$(-1,\ 2,\ 0)$ が与えられている。O は原点とする。3 点 O，A，B を含む平面に対し，C から下ろした垂線の足を H とするとき，H の座標を求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積 V を求めよ。

$\boxed{9}$［2009 早稲田大］

空間内に 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 3)$ がある。原点 O から三角形 ABC へ下ろした垂線の足を H とするとき，H の座標を求めよ。

$\boxed{10}$ [2006 同志社大]

1辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，次の問いに答えよ。ただし，ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を $\vec{u}\cdot\vec{v}$ で表す。

(1)　△OABの面積 S を求めよ。

(2)　△OABの重心をGとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\vec{g}$ とするとき，$(\vec{c}-\vec{g})\cdot\vec{a}=0$ と $(\vec{c}-\vec{g})\cdot\vec{b}=0$ を示せ。

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ の大きさ h を求めよ。

(5)　正四面体OABCの体積 V を求めよ。

$\boxed{11}$ [2013 東北大]

四面体OABCにおいて，OA＝OB＝OC＝1とする。$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点Cから面OABに垂線を引き，その交点をHとする。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。　　(2)　CHの長さを求めよ。

(3)　四面体OABCの体積を求めよ。