微分の計算　4.指数関数の導関数

$\boxed{1}$ [2012 東京都市大]

関数 $f(x)=\dfrac{a\cdot 2^x+b\cdot 2^{-x}}{(a+1)2^x+(b+1)2^{-x}}$ について，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{3}$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{1}{4}$ が成り立つとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{2}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ を示せ.

(2) (1)を利用して，次の極限値を求めよ.

(i) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$　　(ii) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}$　　(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

$\boxed{3}$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ を示せ.

$\boxed{4}$ [(2) 2015 東京理科大]

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^x$　　(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1-2h)^{\frac{1}{h}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\{\log((x+1)-\log x)\}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{x}$

$\boxed{5}$

h を実数として $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ $(a>0,\ a\fallingdotseq 1)$ なる極限値の存在が証明される．ここで，a を 1 に近くとると，この極限値は 0 に近く，a を非常に大きくとると，この極限値も大きい．よってこの極限値がちょうど 1 になるように底 a を選ぶことができる．このようにして選ばれた a をあらためて e と書き，自然対数の底という．以上のことを既知として，次の(1), (2)を証明せよ.

(1) $(e^x)'=e^x$　　(2) $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

微分の計算　4.指数関数の導関数

$\boxed{6}$

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3^{x}-1}{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\{\log(x+1)-\log x\}$

$\boxed{7}$ [武蔵工業大]

連続関数 $f(x)$ が $x=a$ $(a\fallingdotseq 0)$ で微分可能であるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{ae^{f(x)}-xe^{f(a)}}{x^2-a^2}$ を求めよ．

ただし，e は自然対数の底を表す．

$\boxed{8}$

次の関数を微分せよ．

(1) $y=e^{x}-e^{-x}$　(2) $y=e^{x^2+x+1}$　(3) $y=e^{\sin x}$

(4) $y=2^{x}$　(5) $y=3^{2x}$　(6) $y=x^2e^{x}$

(7) $y=e^{x}\cos x$　(8) $y=\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$

$\boxed{9}$

次の関数を微分せよ．

(1) $y=\log 2x$　(2) $y=\log|\cos x|$　(3) $y=(\log x)^2$

(4) $y=\log_3 x$　(5) $y=\log_4 2x$　(6) $y=\log_2|3x-1|$

(7) $y=x^2\log x-x$　(8) $y=\dfrac{\log x}{x^2}$

$\boxed{10}$

Ⅰ．次の関数の導関数を求めよ．ただし，$x>0$ とする．

(1) $y=x^{x}$　(2) $y=(\sqrt{x})^{x}$　(3) $y=x^{\sin x}$

Ⅱ．α が実数のとき，$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{11}$

次の関数を微分せよ．

(1) $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x-2)^3}$　(2) $y=(x-1)^2\sqrt[3]{x+2}$

$\boxed{12}$

次の関数を微分せよ．

(1) $y=\dfrac{(x+4)^2}{(2x-1)^3(3x+2)^4}$　　(2) $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}\,(x+5)}{(x-3)^2}$