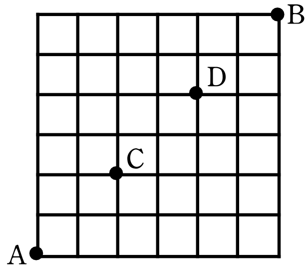


図 1

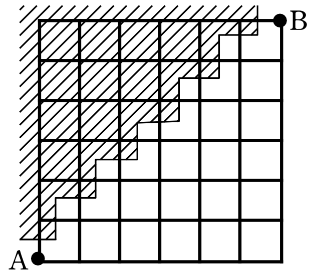


図 2

図 1 と図 2 は碁盤の目状の道路とし，すべて等間隔であるとする。

(1)　図 1 において，点 A から点 B に行く最短経路は全部で何通りあるか求めよ。

(2)　図 1 において，点 A から点 B に行く最短経路で，点 C と点 D のどちらも通らないものは全部で何通りあるか求めよ。

(3)　図 2 において，点 A から点 B に行く最短経路は全部で何通りあるか求めよ。ただし，斜線の部分は通れないものとする。

(08　九州大)

(解説)

(1) $\dfrac{12!}{6!6!}=924$ (通り)

(2) U ：A から B に行く最短経路全体

C ：C を通る最短経路

D ：D を通る最短経路　の集合とする

$n(P)$ は集合 P の要素の個数とすると

求めるものは $n(\overline{C}\cap\overline{D})$

$$n(\overline{C}\cap\overline{D})=n(U)-n(\overline{\overline{C}\cap\overline{D}})\quad(\text{補集合})$$
$$=n(U)-n(C\cup D)\quad(\text{ド・モルガンの法則})$$

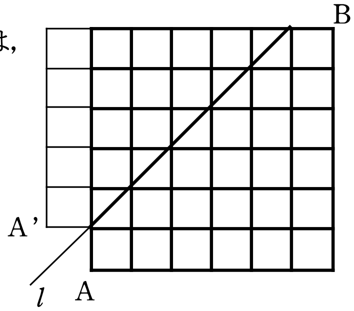
ここで，

$$n(C\cup D)=n(C)+n(D)-n(C\cap D)$$
$$=\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{8!}{4!4!}\times 2-\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{4!}{2!2!}$$
$$=840-216=624$$

よって，

$$n(\overline{C}\cap\overline{D})=924-624=300\ (\text{通り})$$

斜線の部分を通るとき，その経路は直線 l と交わる
AからBに行く最短経路で斜線の部分を通らないものは，
AからBに行く最短経路全体から直線 l を通る経路を除けばよい(余事象)
直線 l を通る経路は
図のように直線 l に関して道路を折り返して，Aと対称な点をA’とする
A’からBへ行く経路はすべて直線 l と交わり，
A’からスタートして初めに直線 l と交わるところまでを直線 l に関して対称に折り返せば，直線 l を通り，AからBに行く最短経路となるから
求める最短経路の数は



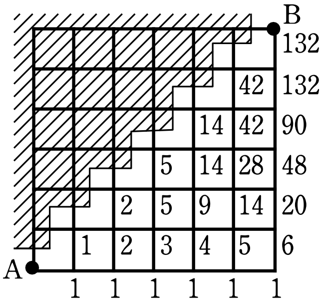
$$924-\frac{12!}{7!5!}=132\ (\text{通り})$$

別解

各交差点を通過する経路の数を記入していくと，
右の図のようになる
よって，求める最短経路の数は

132通り

(1)，(2)も(3)と同様の方法で求められます



参考

本問はカタラン数に関わる問題です。
一般に $n\times n$ の経路の場合，斜線部を通らない最短経路の総数は，

$$\frac{(2n)!}{n\,!\,n\,!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\frac{(2n)!\{(n+1)-n\}}{n\,!(n+1)!}$$

$$=\frac{(2n)!}{n\,!(n+1)!}=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

これをカタラン数といいます。