1.7　記数法(1)

(1) n **進法**

数を表すとき，我々は慣習的に位取りの基礎を 10 とする，10 **進法**を用います。例えば，10 進法で表された 5203 の意味は，

$$5203=5\cdot10^3+2\cdot10^2+0\cdot10^1+3\cdot10^0$$

です。このように表したとき，各位の数×10^n の和で表されていて，この 10^n の 10 を**位取りの基礎**といいます。10 進法では，位として $10^0=1$ の位，10^1 の位，10^2 の位，10^3 の位，…を用い，各位の数字は，上の位から順に左から右へ並べてます。また，各位の数字は0, 1, 2, …, 9 の 10 個の整数 (記号) が用いられます。これは，整数を 10 で割った余りの種類と同じです。

10 進法と同様の考え方で，位取りの基礎を 2 とする数の表し方を 2 **進法**といいます。2 進法では，位として 2^0 の位，2^1 の位，2^2 の位，2^3 の位，…を用い，各位の数字は 0, 1 の 2 個の整数が用いられます。これは整数を 2 で割った余りの種類と同じです。

例えば，2 進法で表された数 1101 の意味は，10 進法では

$$1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0$$

であり，これは 10 進法の数 13 です。

10 進法や 2 進法のような，各位の数字を上の位から順に並べて数を表す方法を**位取り記数法**といいます。

一般に，位取りの基礎を n として数を表す方法を n **進法**といい，n 進法で表された数を n **進数**といいます。また，位取りの基礎となる数 n と**底**といいます。ただし，n は 2 以上の整数で，n 進法の各位の数字は，0 以上 $n-1$ 以下の整数です。

n 進数では，その数の右下に $_{(n)}$ と書きます。例えば，2 進法の 1101 は $1101_{(2)}$ と書きます。10 進法では $_{(10)}$ は普通省略して書きます。

例1
(1) 2 進数 $1101000_{(2)}$ を 10 進法で表すと $^{ア}\boxed{}$ となる。
(2) 3 進法で表された 20212 を 10 進法で表せ.
(3) 4 進法で表された数 $3102_{(4)}$ を 10 進法で表せ.

解説

(1) $1101000_{(2)}=1\cdot2^6+1\cdot2^5+0\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0$

$=64+32+8={}^{ア}104$

(2) $20212_{(3)}=2\cdot3^4+2\cdot3^2+1\cdot3+2$

$=162+18+3+2$

$=185$

(3) $3102_{(4)}=3\cdot4^3+1\cdot4^2+0\cdot4^1+2\cdot4^0$

$=192+16+2=210$

例2
10 進法で表された数 38 を 2 進法で表せ。

解説

$2^5\leqq38<2^6$ より，　$38=2^5\cdot1+6$

$2^2\leqq6<2^3$ より，　$6=2^2\cdot1+2$

$2\leqq2<2^2$ より，　$2=2\cdot1+0$

よって，

$38=2^5\cdot1+6=2^5\cdot1+2^2\cdot1+2=2^5\cdot1+2^2\cdot1+2\cdot1$

$=1\cdot2^5+1\cdot2^2+1\cdot2=100110_{(2)}$

10 進数を n 進数に直す問題は，一般に次のように解くとよい。

38 を 2 で割り，商を 2 で割る割り算を繰り返すと，右のようになる

最後の商 1 の後に，余りを逆順に並べて

$100110_{(2)}$

$$\begin{array}{r|rl} 2 & 38 & \text{余り} \\ \hline 2 & 19 & \cdots\ 0 \\ \hline 2 & 9 & \cdots\ 1 \\ \hline 2 & 4 & \cdots\ 1 \\ \hline 2 & 2 & \cdots\ 0 \\ \hline & 1 & \cdots\ 0 \end{array}$$

これは，

$38=2\cdot19+0$

$19=2\cdot9+1$

$9=2\cdot4+1$

$4=2\cdot2+0$

$2=2\cdot1+0$

より，

$38=2\cdot19+0$

$=2(2\cdot9+1)+0$

$=9\cdot2^2+1\cdot2+0$

$=2^2(2\cdot4+1)+1\cdot2+0$

$=4\cdot2^3+1\cdot2^2+1\cdot2+0$

$=2^3(2\cdot 2+0)+1\cdot 2^2+1\cdot 2+0$
$=2\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2+0$
$=2^4(2\cdot 1+0)+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2+0$
$=1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2+0=100110_{(2)}$

より得られます。

例3
3進法で表された $2020_{(3)}$ を n 進法で表すと $220_{(n)}$ になるとする。このとき，n の値を求めよ。ただし，n は3以上の整数とする。

(解説)

$2020_{(3)}=2\cdot 3^3+0\cdot 3^2+2\cdot 3^1+0\cdot 3^0$
$=54+0+6+0=60$

$220_{(n)}=2\cdot n^2+2\cdot n^1+0\cdot n^0$
$=2n^2+2n$

よって

$2n^2+2n=60$
$n^2+n-30=0$
$(n+6)(n-5)=0$

$n\geqq 3$ より，　$n=5$

(2) n 進法の小数

10進法の小数0.5203の意味は，

$$0.5203=5\cdot\frac{1}{10^1}+2\cdot\frac{1}{10^2}+0\cdot\frac{1}{10^3}+3\cdot\frac{1}{10^4}$$

です。

n 進法では，小数点以下の位は，$\dfrac{1}{n}$ の位，$\dfrac{1}{n^2}$ の位，$\dfrac{1}{n^3}$ の位，…

となります。

例4

(1) 2 進法で表された $10101.101_{(2)}$ を 10 進法の小数で表すと $\boxed{}$ である。

(2) $32.123_{(4)}$ を 10 進法の分数で表すと，$\dfrac{{}^{ア}\boxed{}}{{}^{イ}\boxed{}}$ となる。

(解説)

(1) $10101.101_{(2)}=1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0+1\cdot\dfrac{1}{2^1}+0\cdot\dfrac{1}{2^2}+1\cdot\dfrac{1}{2^2}$

$$=16+4+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$$

$$=21+0.625=21.625$$

(2) $32.123_{(4)}=3\cdot 4^1+2\cdot 4^0+1\cdot\dfrac{1}{4^1}+2\cdot\dfrac{1}{4^2}+3\cdot\dfrac{1}{4^3}$

$$=12+2+\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{3}{64}$$

$$=\frac{{}^{ア}923}{{}^{イ}64}$$

例5

次の ⓪ ～ ⑤ の 6 進法の小数のうち，10 進法で表すと有限小数として表せるのは，$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$，$\boxed{ソ}$ である。ただし，解答の順序は問わない。

⓪ $0.3_{(6)}$　　① $0.4_{(6)}$

② $0.33_{(6)}$　　③ $0.43_{(6)}$

④ $0.033_{(6)}$　　⑤ $0.043_{(6)}$

(解説)

⓪ $0.3_{(6)}=3\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}=0.5$

① $0.4_{(6)}=4\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$

② $0.33_{(6)}=3\cdot\dfrac{1}{6}+3\cdot\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{7}{12}$

③ $0.43_{(6)}=4\cdot\dfrac{1}{6}+3\cdot\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{3}{4}=0.75$

④ $0.033_{(6)}=3\cdot\dfrac{1}{6^2}+3\cdot\dfrac{1}{6^3}=\dfrac{7}{72}$

⑤ $0.043_{(6)}=4\cdot\dfrac{1}{6^2}+3\cdot\dfrac{1}{6^3}=\dfrac{1}{8}=0.125$

よって，有限小数として表せるのは

ス，セ，ソ ⓪，③，⑤

一般に，10 進数の整数でない既約分数 $\dfrac{m}{n}$ について，次のことが成り立ちます。

分母 n の素因数は $2, 5$ だけからなる $\Leftrightarrow$ $\dfrac{m}{n}$ は有限小数で表される
分母 n の素因数に $2, 5$ 以外のものがある $\Leftrightarrow$ $\dfrac{m}{n}$ は循環小数で表される

分母 n の素因数が $2, 5$ だけからなるとき，

$\dfrac{m}{n}$ は，分母と分子に 2 または 5 を何回かかけることにより，

$\dfrac{\text{整数}}{10^k}$ (k は整数)の形に変形することができる。

よって， $\dfrac{m}{n}$ は有限小数である。

逆に， $\dfrac{m}{n}$ が有限小数のとき，

ある整数 k に対して， $\dfrac{10^k m}{n}$ は整数とできる。

m, n は互いに素であるから， n は 10^k の約数である。

したがって， n の素因数は $2, 5$ だけからなる。

下は対偶命題というものを考えればすぐに導かれます。

例6

(1)　10 進法で表された分数 $\dfrac{23}{32}$ を 2 進法の小数で表せ。

(2)　$\dfrac{123}{343}$ を 7 進法の小数で表すと $\boxed{\qquad}_{(7)}$ である。

（解説）

(1) 23 を 2 で割り，商を 2 で割る割り算を繰り返すと右のようになる

$$\begin{array}{r|rl} 2) & 23 & \text{余り} \\ 2) & 11 & \cdots 1 \\ 2) & 5 & \cdots 1 \\ 2) & 2 & \cdots 1 \\ 2) & 1 & \cdots 0 \\ & 0 & \cdots 1 \end{array}$$

よって， $23=1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0$

したがって,

$$\frac{23}{32}=\frac{1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0}{2^5}$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2^2}+1\cdot\frac{1}{2^3}+1\cdot\frac{1}{2^4}+1\cdot\frac{1}{2^5}$$

$$=0.10111_{(2)}$$

(2) $123=17\cdot 7+4$，$17=2\cdot 7+3$ であるから

$$123=(2\cdot 7+3)\cdot 7+4=2\cdot 7^2+3\cdot 7+4$$

よって,

$$\frac{123}{343}=\frac{2\cdot 7^2+3\cdot 7+4}{7^3}=2\cdot\frac{1}{7}+3\cdot\frac{1}{7^2}+4\cdot\frac{1}{7^3}=0.234_{(7)}$$

例7

10 進法で表された数 23.32 は，5 進法では $\boxed{\qquad}$ と表される。

（解説）

$23.32=23+0.32$

23 を 5 進法で表すと， $23=4\cdot 5+3=43_{(2)}$

0.32 を 5 進法で表すと,

$$0.32=\frac{32}{100}=\frac{8}{25}=\frac{1\cdot 5+3}{5^2}=1\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5^2}=0.13_{(2)}$$

よって,

$$23.32=43.13_{(5)}$$

一般に，次のように解くとよい。
0.32 を 5 進法で表すと，

0.32 に 5 を掛けると 1.6 より，整数部分 1 が $\dfrac{1}{5}$ の位の数である

$1.6-1=0.6$ に 5 を掛けると 3 より，整数部分 3 が $\dfrac{1}{5^2}$ の位の数である

よって，$23.32=43.13_{(5)}$
これは，
$0.32=0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\cdots_{(5)}$ とすると，

$$0.32=a_{-1}\cdot\frac{1}{5}+a_{-2}\cdot\frac{1}{5^2}+a_{-3}\cdot\frac{1}{5^3}+\cdots$$

両辺 5 をかけて，

$$1.6=a_{-1}+a_{-2}\cdot\frac{1}{5}+a_{-3}\cdot\frac{1}{5^2}+\cdots$$

整数部分を比較して，$a_{-1}=1$
両辺 a_{-1} を引いて，

$$0.6=a_{-2}\cdot\frac{1}{5}+a_{-3}\cdot\frac{1}{5^2}+\cdots$$

両辺 5 をかけて，

$$3=a_{-2}+a_{-3}\cdot\frac{1}{5}+\cdots$$

整数部分を比較して，$a_{-2}=3$
両辺 a_{-2} を引いて，

$$0=a_{-3}\cdot\frac{1}{5}+\cdots$$

よって，以下 0 となるから

$$0.32=0.13_{(5)}$$

例8
7 進法で表された循環小数 $0.\dot{3}\dot{5}_{(7)}$ を 5 進法の小数に直すと $\boxed{}$ である。

解説

$x=0.\dot{3}\dot{5}_{(7)}$ とおくと，

$$x=\frac{3}{7^1}+\frac{5}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{5}{7^4}+\cdots\cdots ①$$

① の両辺に 7^2 を掛けて

$$7^2x=3\cdot 7^1+5\cdot 7^0+\frac{3}{7^1}+\frac{5}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{5}{7^4}+\cdots \quad \cdots ②$$

②−①より，

$$48x=26 \qquad \therefore\ x=\frac{13}{24}$$

これを 5 進法に直すと，

$\dfrac{13}{24}\times 5=\dfrac{65}{24}=2+\dfrac{17}{24}$ より， $\dfrac{1}{5}$ の位は 2

$\dfrac{17}{24}\times 5=\dfrac{85}{24}=3+\dfrac{13}{24}$ より， $\dfrac{1}{5^2}$ の位は 3

$\dfrac{13}{24}\times 5=\dfrac{65}{24}=2+\dfrac{17}{24}$ より， $\dfrac{1}{5^3}$ の位は 2

あとはこれをくり返して，

$$0.\dot{3}\dot{5}_{(7)}=0.\dot{2}\dot{3}_{(5)}$$

確認問題1

n を 4 以上の整数とする。

(1)　$(n+1)(3n^{-1}+2)(n^2-n+1)$ と表される数を n 進法の小数で表せ。

(2)　3 進数 $21201_{(3)}$ を n 進法で表すと $320_{(n)}$ となるような n の値を求めよ。

(3)　正の整数 N を 3 倍して 7 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(7)}$ となり，N を 4 倍して 8 進法で表すと 3 桁の数 $acb_{(8)}$ となる。各位の数字 a，b，c を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

解説

(1) $(n+1)(3n^{-1}+2)(n^2-n+1)$

$=(n^3+1)(2+3n^{-1})$

$=2n^3+3n^2+2+3n^{-1}=2302.3_{(n)}$　答

(2) $21201_{(3)}$ と $320_{(n)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと

$$21201_{(3)}=2\cdot 3^4+1\cdot 3^3+2\cdot 3^2+0\cdot 3^1+1\cdot 3^0=162+27+18+1=208$$

$$320_{(n)}=3\cdot n^2+2\cdot n^1+0\cdot n^0=3n^2+2n$$

$21201_{(3)}=320_{(n)}$ より

$$208=3n^2+2n$$

$$3n^2+2n-208=0$$

$$(n-8)(3n+26)=0$$

$n\geqq 4$ より，$n=8$　答

(3) 条件より，

$$1\leqq a\leqq 6,\ 0\leqq b\leqq 6,\ 0\leqq c\leqq 6$$

$3N=a\cdot 7^2+b\cdot 7^1+c\cdot 7^0=49a+7b+c$ … ①

$4N=a\cdot 8^2+c\cdot 8^1+b\cdot 8^0=64a+8c+b$ … ②

①×4−②×3 より

$$4a+25b-20c=0$$

$4a=5(4c-5b)$ … ③

4 と 5 は互いに素であるから，a は 5 の倍数である

$1\leqq a\leqq 6$ より，$a=5$

③より，$4c-5b=4$

$5b=4(c-1)$　…… ④

4 と 5 は互いに素であるから，b は 4 の倍数である

$0\leqq b\leqq 6$ より，$b=0$，4

$b=0$ のとき，　$c=1$，　$3N=49\cdot5+7\cdot0+1=246$　　$\therefore\ N=82$
$b=4$ のとき，　$c=6$，　$3N=49\cdot5+7\cdot4+6=279$　　$\therefore\ N=93$
よって，
　$(a,\ b,\ c)=(5,\ 0,\ 1)$ のとき，　$N=82$
　$(a,\ b,\ c)=(5,\ 4,\ 6)$ のとき，　$N=93$　答

確認問題2

小数第 k 位までの有限小数は，$\dfrac{\text{整数}}{10^k}$ の形に表される。例えば，

$0.321=\dfrac{{}^{ア}\boxed{}}{10^3}$ である。10 の素因数は小さい順に ${}^{イ}\boxed{}$，${}^{ウ}\boxed{}$

であるから，$\dfrac{\text{整数}}{10^k}$ の分母の素因数は ${}^{イ}\boxed{}$ と ${}^{ウ}\boxed{}$ だけである。

逆に，整数でない既約分数において，分母の素因数に ${}^{イ}\boxed{}$ と

${}^{ウ}\boxed{}$ 以外がなければ，分母と分子に ${}^{イ}\boxed{}$，${}^{ウ}\boxed{}$ を何個か掛

けて $\dfrac{\text{整数}}{10^k}$ の形にすることができる。

$2^k<1000$ を満たす最大の正の整数 k は ${}^{エ}\boxed{}$ である。$2\leqq n\leqq1000$ を

満たす整数 n の中で，$\dfrac{1}{n}$ が有限小数となるものは ${}^{オ}\boxed{}$ 個ある。こ

れらの有限小数の中で，ちょうど小数第 3 位で終わるものは ${}^{カ}\boxed{}$ 個

ある。

解説

$0.321=\dfrac{{}^{ア}321}{10^3}$　答

$10=2\cdot5$ より，10 の素因数は小さい順に　${}^{イ}2$，${}^{ウ}5$　答

$2^9=512$，$2^{10}=1024$ より，　$2^k<1000$ を満たす最大の正の整数 k は${}^{エ}9$

答

$\dfrac{1}{n}$ が有限小数となるとき，　$n=2^a\cdot5^b\ (\,a,b\geqq0\,)$となればよいから，

$0 \leqq a \leqq 9$ で考えて,

$(a, b)=(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1)$
$(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(4,0),(4,1),(4,2),(5,0)$
$(5,1),(5,2),(6,0),(6,1),(7,0),(7,1),(8,0),(9,0)$

の ${}^{オ}28$ 個　答

分母と分子に 2 と 5 を何個かかけて $\dfrac{整数}{10^k}$ とするとき,

2 と 5 のどちらかだけを何個かかければ 10^k とできるから,

分子の整数が 10 の倍数となることはない

よって，この 28 個うち小数第 3 位で終わるものは,

$k=3$ となればよいから,

$n=2^a \cdot 5^b$ の a, b の最大値が 3 となるもの個数を求めればよい

よって， ${}^{カ}7$ 個　答