A, B, C の 3 人で勝ち抜き戦を行う．3 人の戦力は同等である．第 1 回戦で A と B が対戦し，その勝者が第 2 回戦で C と対戦する．もし C が負ければ，A か B が連勝したことになり，優勝が決まるものとする．C が勝てば，第 1 回戦の敗者が第 3 回戦で C と対戦する．以下これをくり返し，誰かが 2 連勝したところで優勝が決まるものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 第 1 回戦で B が勝ち，第 2 回戦で C が勝ち，第 3 回戦では A が勝った場合を BAC のように表すことにする．このような表し方で，第 1 回戦から第 7 回戦までに A が優勝する場合をすべて書け (説明，証明は不要である)．

(2) 第 n 回戦までに優勝が決まらない確率を求めよ．

(3) 第 n 回戦までに C が優勝する確率を p_n とするとき，$\lim_{n\to\infty} p_n$ の値を求めよ．

(86　神戸大)

解説

(1) 対戦が続くとき，勝者が毎回変わるから

$$\mathrm{A_B} \to \mathrm{C_A} \to \mathrm{B_C} \to \mathrm{A_B} \to \cdots$$

$$\mathrm{B_A} \to \mathrm{C_B} \to \mathrm{A_C} \to \mathrm{B_A} \to \cdots$$

が繰り返される。A が優勝するときは，

上の場合，どこかで $\mathrm{A_B} \to \mathrm{A_C}$，下の場合，どこかで $\mathrm{A_C} \to \mathrm{A_B}$ となればよいから

AA, ACBAA, BCAA, BCABCAA

(2) はじめはどちらが勝ってもよくて，あとは毎回勝者が変わればよいから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(3) C が優勝するとき，(1)の図式において

上の場合，どこかで $\mathrm{C_A} \to \mathrm{C_B}$，下の場合，どこかで $\mathrm{C_B} \to \mathrm{C_A}$ となればよいから

いずれにしても，$3k$ (k は自然数) 回目に優勝が決まり，$3k$ 回目に優勝する確率は

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3k-1}$$

($3k-2$ 回目，$3k-1$ 回目に優勝する確率は 0)

よって

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \cdots \quad (p_{3m} = p_{3m+1} = p_{3m+2} \text{ であるから収束する})$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{2}{7}$$

参考

(2)において，$n\to\infty$ とすると，第 n 回戦までに優勝が決まらない確率は 0 に近づく

また，A と B が優勝する確率は等しいから，A, B が優勝する確率を q_n とすると

$\lim_{n\to\infty} q_n = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{7}\right) = \frac{5}{14}$ となり，やはり，A, B の方が有利です。