1.4　不定方程式(1)

(1) 分数式の整数値

分数式が整数値をとる条件を求める問題について考えます。

例1

(1) n を自然数とするとき，$\dfrac{4n+1}{2n-1}$ は整数値 a をとるものとする。a の最大値を求めよ。

(2) $\dfrac{6n^2+11n+38}{3n-2}$ が整数となるような最大の自然数 n を求めよ。

(解説)

(1) $\dfrac{4n+1}{2n-1}=\dfrac{2(2n-1)+3}{2n-1}=2+\dfrac{3}{2n-1}$ (仮分数を帯分数に直す)

これが整数値をとるとき，$2n-1$ は 3 の約数より，

$$2n-1=\pm1,\ \pm3$$

よって，a の最大値は，$a=5$

(2) $\dfrac{6n^2+11n+38}{3n-2}=\dfrac{(3n-2)(2n+5)+48}{3n-2}=2n+5+\dfrac{48}{3n-2}$

これが整数値をとるとき，$3n-2$ は 48 の約数より

$$3n-2=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm8,\ \pm12,\ \pm16,\ \pm24,\ \pm48$$

よって，最大の自然数 n は，$n=6$

例2

(1)　不等式 $|3x+2|<x^2+x+1$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(2)　$\dfrac{3n+2}{n^2+n+1}$ が整数となるような整数 n をすべて求めよ。

(解説)

(1) $x\geqq-\dfrac{2}{3}$ のとき，$3x+2<x^2+x+1$

$$x^2-2x-1>0 \quad \therefore -\frac{2}{3}\leqq x<1-\sqrt{2},\ x>1+\sqrt{2}$$

$x<-\dfrac{2}{3}$ のとき，$-(3x+2)<x^2+x+1$

$$x^2+4x+3>0 \quad \therefore x<-3,\ -1<x<-\frac{2}{3}$$

よって，$x<-3,\ -1<x<1-\sqrt{2},\ x>1+\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{3n+2}{n^2+n+1}$ が整数となるとき，

$\left|\dfrac{3n+2}{n^2+n+1}\right|\geqq 1$ であることが必要

$n^2+n+1\geqq 0$ より

$\dfrac{|3n+2|}{n^2+n+1}\geqq 1\quad \therefore |3n+2|\geqq n^2+n+1$

これを満たす n は (1) を利用して，$n=-3,\ -2,\ -1, 0, 1, 2$

この中で，$\dfrac{3n+2}{n^2+n+1}$ が整数となるのは，$n=-3,\ -1, 0$

(2) (2 元) 1 次不定方程式の整数解

a, b, c は整数の定数で，$a\neq 0, b\neq 0$ とする。

x, y の 1 次方程式 $ax+by=c$ を成り立たせる整数 x, y の組を，この方程式の**整数解**といいます。また，この方程式の整数解を求めることを，**1 次不定方程式を解く**といいます。

例えば，$3x+2y=0$ は，

$(x, y)=(0, 0), (2, -3), (4, -6), \cdots$

のように，整数解が 1 つ存在すれば，整数解は無数に存在します。

整数解が存在するとき，整数解は無数に存在し，1 つに定まらないことから，「不定」方程式といいます。

例3

x，y を正の整数とする。方程式 $3x+2y=100$ について，次の問いに答えよ。

(1)　与式を満たす x，y の組 $(x,\ y)$ のうち，x が最小であるものを求めよ。

(2)　与式を満たす x および y を，正の整数 k を用いて表せ。

(3)　与式を満たす x，y の組 $(x,\ y)$ は，全部で何組あるか。

解説

(1) $(x, y)=(2, 47)$

(2) $3x+2y=100$

$3x=2(50-y)$ …①

$50-y$ は整数より，$3x$ は 2 の倍数である

2 と 3 は互いに素であるから，x は 2 の倍数より

$x=2k$ (k は自然数)

①より

$50-y=3k \quad \therefore\ y=50-3k$

y は自然数より

$50-3k \geqq 1 \quad \therefore\ k \leqq \dfrac{49}{3}$

よって，

$(x, y)=(2k, 50-3k)$ (k は自然数，$k \leqq 16$)

(3) (2)より，16 個

例4
方程式 $2x+3y=7$ の整数解は，n を任意の整数とするとき，

$x=$ ア $\boxed{}\,n-1$, $y=$ イ $\boxed{}\,n+$ ウ $\boxed{}$

(解説)

$2x+3y=7$ …①

$(x, y)=(2, 1)$ は整数解の 1 つであるから，

$2\cdot 2+3\cdot 1=7$ …②

①−②より

$2(x-2)+3(y-1)=0$

$2(x-2)=-3(y-1)$ …③

x, y が整数のとき，$2(x-2)$ は 3 の倍数である

2 と 3 は互いに素であるから，$x-2$ は 3 の倍数より

$x-2=3k$ (k は整数) $\quad \therefore\ x=3k+2=3(k+1)-1$

③より，$y-1=-2k \quad \therefore\ y=-2k+1$

$n=k+1$ とおくと，

$x=3n-1$, $y=-2n+3$ (n は整数)

別解

$x=\dfrac{-3y+7}{2}=-y+\dfrac{-y+7}{2}$ (分子の y の係数を 1 か −1 にする)

x が整数のとき，$-y+7$ は 2 の倍数となればよいから

$-y+7=2k$ (k は整数) $\quad \therefore\ y=-2k+7$

例5

(1) 方程式 $5x+8y=139$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2) 1 次不定方程式 $17x+22y=1$ の整数解をすべて求めよ。

(解説)

(1) $5x+8y=139 \cdots$①

$5x+8(y-17)=3$ (定数項を小さくする)

$(x,y-17)=(-1,1)$，すなわち，$(x,y)=(-1,18)$ は整数解の 1 つであるから，

$$5\cdot(-1)+8\cdot 18=139 \cdots ②$$

①−②より

$$5(x+1)+8(y-18)=0$$

$$5(x+1)=-8(y-18) \cdots ③$$

x,y が整数のとき，$5(x+1)$ は 8 の倍数である

5 と 8 は互いに素であるから，$x+1$ は 8 の倍数より，

$$x+1=8k \ (k\text{は整数}) \quad \therefore x=8k-1$$

③より，$y-17=-5k \quad \therefore y=-5k+18$

x,y が正の整数のとき

$$8k-1>0,\ -5k+18>0 \quad \therefore \frac{1}{8}<k<\frac{18}{5}$$

よって，

$$(x,y)=(7,13),(15,8),(23,3)$$

(2) $17x+22y=1 \cdots$①

$17(x+y)+5y=1$ (係数を小さくする)

$(x+y,y)=(-2,7)$，すなわち，$(x,y)=(-9,7)$ は整数解の 1 つであるから，

$$17\cdot(-9)+22\cdot 7=1 \cdots ②$$

①−②より

$$17(x+9)+22(y-7)=0$$

$$17(x+9)=-22(y-7) \cdots ③$$

x,y が整数のとき，$17(x+9)$ は 22 の倍数である

17 と 22 は互いに素であるから，$x+9$ は 22 の倍数より，

$$x+9=22k \ (k\text{は整数}) \quad \therefore x=22k-9$$

③より，$y-7=-17k \quad \therefore y=-17k+7$

よって，

$$(x,y)=(22k-9,\ -17k+7) \ (k\text{は整数})$$

例6

$297x+139y=1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を 1 組求めよ。

解説

297 と 139 に互除法の計算を行うと

$297=139\cdot2+19$　移項して，$19=297-139\cdot2$ …①

$139=19\cdot7+6$　移項して，$6=139-19\cdot7$ …②

$19=6\cdot3+1$　移項して，$1=19-6\cdot3$ …③

よって，

$1=19-6\cdot3$

$=19-(139-19\cdot7)\cdot3$ (②を代入)

$=139\cdot(-3)+19\cdot22$

$=139\cdot(-3)+(297-139\cdot2)\cdot22$ (①を代入)

$=297\cdot22+139\cdot(-47)$

したがって，$297x+139y=1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の 1 組は

$(x,\ y)=(22,\ -47)$

このように，互除法の計算を利用すると，2 つの整数 a, b の最大公約数 d を，適当な整数 p, q を用いて $d=ap+bq$ と表すことができます。

とくに，a と b が互いに素であるとき，

$ap+bq=1$

を満たす整数 p, q が存在します。両辺に c をかけて，

$a(cp)+b(cq)=c$

このことから，次のことがいえます。

2 つの整数 a, b が互いに素であるならば，

任意の整数 c について，$ax+by=c$ を満たす整数 x, y が存在する

例7

(1) 不定方程式 $92x+197y=1$ を満たす整数 $x,\ y$ の組の中で，x の絶対値が最小のものは $x=\boxed{\text{アイ}}$，$y=\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(2) 不定方程式 $92x+197y=10$ を満たす整数 $x,\ y$ の組の中で，x の絶対値が最小のものは $x=\boxed{\text{オカキ}}$，$y=\boxed{\text{クケ}}$ である。

解説

(1) $92x+197y=1$ …①

197 と 92 に互除法の計算を行うと

$197=92\cdot 2+13$ $\therefore\ 13=197-92\cdot 2$

$92=13\cdot 7+1$ $\therefore\ 1=92-13\cdot 7$

よって,

$1=92-13\cdot 7$

$=92-(197-92\cdot 2)\cdot 7$

$=92\cdot 15+197\cdot(-7)$

$\therefore\ 92\cdot 15+197\cdot(-7)=1$ …②

①−②より

$92(x-15)+197(y+7)=0$

$92(x-15)=-197(y+7)$ …③

x, y が整数のとき, $92(x-15)$ は 197 の倍数である

92 と 197 は互いに素であるから, $x-15$ は 197 の倍数より

$x-15=197k$ (k は整数) $\therefore\ x=197k+15$

③より, $y+7=-92k$ $\therefore\ y=-92k-7$

$k=0$ のとき, x の絶対値は最小となり, このとき,

$x=$ アイ15, $y=$ ウエ-7

(2) $92x+197y=10$ …④

②の両辺を 10 倍して

$92\cdot 150+197\cdot(-70)=10$ …⑤

④−⑤より

$92(x-150)+197(y+70)=0$

$92(x-150)=-197(y+70)$

(1)と同様にして,

$x=197l+150$, $y=-92l-70$ (l は整数)

$l=-1$ のとき, x の絶対値は最小となり, このとき,

$x=$ オカキ-47, $y=$ クケ22

$ax+by=c$ の解き方についてまとめておきます。

$ax+by=c$ の解き方
(1) $c=0$ (a, b は互いに素)のとき
by を移項して， a と b が互いの素であることを利用して解く
(2) $c \fallingdotseq 0$ (a, b, c は互いに素)のとき
(ア) a と c または b と c が互いに素でないとき
それぞれ， ax, by を移項して，(1)に帰着させて解く(例3)
(イ) a と b ， a と c ， b と c がすべて互いに素 (このとき， a と b と c は**対ごとに素**であるといいます)であるとき
まず，整数解を 1 つ見つけて (**特殊解**)，もとの方程式から方程式に特殊解を代入した式を引いて，(1)に帰着させて解く (**一般解**を求める) (例4)

注 c や a, b の絶対値が大きくて特殊解を求めづらいときは，
例5 のように，それらを小さくするために置き換えをしたり，
例6 のように，ユークリッドの互除法の計算を利用して求めます。
ユークリッドの互除法の計算を用いれば必ず特殊解を求めることはできますが，面倒なので，すべての方法を理解しておくとよい。

例8
不定方程式 $756x+232y=1$ について考える。
(1) 756 と 232 の最大公約数を求めよ。
(2) $756x+232y=1$ が整数解をもたないことを証明せよ。

解説
(1) ユークリッドの互除法より

$756=232\cdot 3+60$

$232=60\cdot 3+52$

$60=52\cdot 1+8$

$52=8\cdot 6+4$

$8=4\cdot 2+0$

よって，756 と 232 の最大公約数は， 4
(2) (1)より，756 と 232 は 4 の倍数であるから，
$756x+232y$ は 4 の倍数である
ところが，右辺の 1 は 4 の倍数ではないから，
$756x+232y=1$ は整数解をもたない

例9
次の各問いに答えよ。
(1)　1次不定方程式 $7x-17y=1$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ のうち，y が最小となる組を求めよ。
(2)　7で割ると3余り，17で割ると5余るような自然数 n のうち，2桁のものを求めよ。
(3)　7で割ると3余り，17で割ると5余るような自然数 n のうち，3桁で最大のものを求めよ。

解説

(1) $7x-17y=1$ … ①
$(x, y)=(5, 2)$ は整数解の1つであるから，
$7\cdot5-17\cdot2=1$ …②
①−②より
$7(x-5)-17(y-2)=0$
$7(x-5)=17(y-2)$ … ③
x, y が整数のとき，$7(x-5)$ は17の倍数である
7と17は互いに素であるから，$x-5$ は17の倍数より
$x-5=17k$ (k は整数)　$\therefore\ x=17k+5$
③より，$y-2=7k$　$\therefore\ y=7k+2$
x, y が自然数のとき，$k\geqq0$
この中で y が最小となるのは $k=0$ のときで，このとき
$(x,\ y)=(5,\ 2)$
(2) n は x, y を整数として，
$n=7x+3, n=17y+5$ と表せる
よって，
$7x+3=17y+5$　$\therefore\ 7x-17y=2$ … ④
②の両辺を2倍して
$7\cdot10-17\cdot4=2$ … ⑤
④−⑤より
$7(x-10)-17(y-4)=0$
$7(x-10)=17(y-4)$
(1)と同様にして
$x=17k+10,\ y=7k+4$ (k は整数)

したがって

$$n=7x+3=7(17k+10)+3=119k+73$$

n の中で 2 桁のものは $k=0$ のときのみで，このとき

$$n=119\cdot 0+73=73$$

(3) (2)より

$$119k+73<1000 \qquad \therefore\ k<\frac{927}{119}=7.7\cdots$$

よって，n のうち，3 桁で最大のものは $k=7$ のときで，このとき

$$n=119\cdot 7+73=906$$

確認問題1

(1) 方程式 $18x-7y=9$ を満たす2つの正の整数 x, y の中で，$x+y$ が最小になるのは $x=$ ア $\boxed{}$，$y=$ イ $\boxed{}$ のときであり，$x+y$ の2番目に小さい値は ウ $\boxed{}$ である。

(2) 方程式 $7x+19y=2014$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ は $\boxed{}$ 個ある。

(3) 方程式 $48x+539y=77$ を満たす整数解 x, y をすべて求めよ.

解説

(1) $18x-7y=9$

$7y=9(2x-1)\cdots$①

x, y が整数のとき，$7y$ は9の倍数である

7と9は互いに素であるから，y は9の倍数より，

$y=9k$ (k は整数)

①より，$2x-1=7k$　$\therefore 2x=7k+1$

よって，$7k+1$ は2の倍数である

$7k+1$ が偶数となるのは，$k=2m-1$ (m は整数)のときで，このとき，

$(x, y)=(7m-3, 18m-9)$

x, y が正の整数のとき，$m\geqq 1$

$x+y=25m-12$

$x+y$ が最小となるのは $m=1$ のときで，このとき，

$x=4, y=9$　答

$x+y$ が2番目に小さくなるのは $m=2$ のときで，このとき，

$x+y=38$　答

(2) $7x+19y=2014$

$7x=-19(y-106)\cdots$①

x, y が整数のとき，$7x$ は19の倍数である

7と19は互いに素であるから，x は19の倍数より

$x=19k$ (k は整数)

①より，$y-106=-7k$　$\therefore y=-7k+106$

x, y が自然数のとき，

$$19k>0,\ -7k+106>0 \qquad \therefore 0<k<\frac{106}{7}$$

よって，求める自然数の組 (x, y) は15個ある　答

(3) $48x+539y=77$

$48x=-77(7y-1)$ …①

x, y が整数のとき，$48x$ は 77 の倍数である

48 と 77 は互いに素であるから，x は 77 の倍数より

$x=77k$　(k は整数)

①より，$7y-1=-48k$　$\therefore 7y+48k=1$ …②

$(y, k)=(7, -1)$ は整数解の 1 つであるから，

$7\cdot 7+48\cdot(-1)=1$ …③

②−③より，

$7(y-7)+48(k+1)=0$

$\therefore 48(k+1)=-7(y-7)$

7 と 48 は互いに素であるから，$k+1$ は 7 の倍数より，

$k+1=7m$ (m は整数)　$\therefore k=7m-1$

よって，

$(x, y)=(539m-77, -48m+7)$ (m は整数)　答

別解

①より，$(x, y)=(-77, 7)$ は整数解の 1 つであるから

$48\cdot(-77)+539\cdot 7=77$

を $48x+539y=77$ からひいて求めてもよい

確認問題2

(1)　71 と 33 が互いに素であることを示せ。

(2)　$71x-33y=1$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

(3)　71 で割ると 2 余り，33 で割ると 7 余る自然数のうち，4 桁で最小のものを求めよ。

(解説)

(1) ユークリッドの互除法より，

$71=33\cdot2+5 \quad \therefore 5=71-33\cdot2$

$33=5\cdot6+3 \quad \therefore 3=33-5\cdot6$

$5=3\cdot1+2 \quad \therefore 2=5-3\cdot1$

$3=2\cdot1+1 \quad \therefore 1=3-2\cdot1$

$2=1\cdot2+0$

よって，71 と 33 の最大公約数は 1，すなわち，互いに素である　終

(2) (1) の計算を利用すると

$$\begin{aligned}1&=3-2\cdot1\\&=3-(5-3\cdot1)\cdot1\\&=3\cdot2-5\\&=(33-5\cdot6)\cdot2-5\\&=33\cdot2-5\cdot13\\&=33\cdot2-(71-33\cdot2)\cdot13\\&=33\cdot28-71\cdot13\\&=71\cdot(-13)-33\cdot(-28)\end{aligned}$$

よって，求める整数 x, y の組の 1 つは，$x=-13, y=-28$　答

(3) 求める自然数を n とすると，n は整数 a, b を用いて，

$n=71a+2$, $n=33b+7$ と表せる

よって，

$71a+2=33b+7 \quad \therefore 71a-33b=5 \cdots ①$

(2) より

$71\cdot(-13)-33\cdot(-28)=1$

両辺に 5 を掛けて，

$71\cdot(-65)-33\cdot(-140)=5 \cdots ②$

①－②より，

$71(a+65)-33(b+140)=0$

$\therefore 71(a+65)=33(b+140)$

a, b が整数のとき，$71(a+65)$ は 33 の倍数である
71 と 33 は互いに素であるから，$a+65$ は 33 の倍数より，

$a+65=33k$ (k は整数)　$\therefore\ a=33k-65$

よって，

$n=71(33k-65)+2=2343k-4613$

この中で 4 桁で最小のものは，$k=3$ のとき，2416　㊟

確認問題3
(1)　8633 と 6052 の最大公約数を求めよ。
(2)　方程式 $8633x+6052y=1068$ の整数解をすべて求めよ。

(解説)

(1) ユークリッドの互除法より

$8633=6052\cdot1+2581$

$6052=2581\cdot2+890$

$2581=890\cdot2+801$

$890=801\cdot1+89$

$801=89\cdot9$

よって，8633 と 6052 の最大公約数は，89　㊟

(2) $8633x+6052y=1068$

両辺を 89 で割ると

$97x+68y=12$ …①

$97=68\cdot1+29$　$\therefore\ 29=97-68\cdot1$

$68=29\cdot2+10$　$\therefore\ 10=68-29\cdot2$

$29=10\cdot2+9$　$\therefore\ 9=29-10\cdot2$

$10=9\cdot1+1$　$\therefore\ 1=10-9\cdot1$

互除法の計算より，

$1=10-9\cdot1$

$=10-(29-10\cdot2)\cdot1$

$=10\cdot3+29\cdot(-1)$

$=(68-29\cdot2)\cdot3+29\cdot(-1)$

$=68\cdot3+29\cdot(-7)$

$=68\cdot3+(97-68\cdot1)\cdot(-7)$

$=97\cdot(-7)+68\cdot10$

両辺 12 倍して,

$$97\cdot(-84)+68\cdot120=12 \quad \cdots ②$$

①−②より

$$97(x+84)+68(y-120)=0$$

$$97(x+84)=-68(y-120) \quad \cdots ③$$

$x,\ y$ が整数のとき, $97(x+84)$ は 68 の倍数である

68 と 97 は互いに素であるから, $x+84$ は 68 の倍数より

$$x+84=68k \ (\ k \text{ は整数}) \qquad \therefore\ x=68k-84$$

③より,

$$y-120=-97k \qquad \therefore\ y=-97k+120$$

よって,

$$(x,\ y)=(68k-84,\ -97k+120) \ (\ k \text{ は整数}) \quad \boxed{\text{答}}$$