高3数学α　数学Ⅲスタ演　9.数列の極限

$\boxed{1}$ [2009 明治大]

n を自然数として，

$$a_n=2^2+4^2+6^2+\cdots\cdots+(2n)^2$$
$$b_n=1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2$$

と定める。このとき，

$$a_n=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\left(\boxed{\text{ウ}}\,n^3+\boxed{\text{エ}}\,n^2+n\right)$$

$$b_n=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\left(\boxed{\text{キ}}\,n^3-n\right)$$

である。よって，

$$\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}}{\sqrt{n}}=\frac{\boxed{\text{ク}}\,n^{\boxed{\text{ケ}}}+n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}\right)}$$

であることを使えば，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

であることがわかる。

$\boxed{2}$ [2011 産業医科大]

数列の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2}-2n\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2}+n^2\right\}$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ [2003 弘前大]

r を正の定数とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-3^{n+1}}{r^n+3^{n-1}}$ を求めよ．

$\boxed{4}$ [2007 公立はこだて未来大]

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　$|\tan\theta|<1$ となる θ の範囲を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\tan^n\theta$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^n\theta-\cos^n\theta}{\sin^n\theta+\cos^n\theta}$ を求めよ。ただし，$\theta\fallingdotseq-\dfrac{\pi}{4}$ とする。

$\boxed{5}$［2008 関西大］

n を 2 以上の自然数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=$ ${}^{ア}\boxed{}$ であり，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n-1)^2\log\left\{1+\frac{3}{4n(n-1)}\right\}=$ ${}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{6}$［2012 東京都市大］

$a_n=\dfrac{n^n}{n\,!}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ を用いてよい。

$\boxed{7}$［1998 立命館大］

$0<a<b$ である定数 a, b がある．$x_n=\left(\dfrac{a^n}{b}+\dfrac{b^n}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ とおくとき

(1)　不等式 $b^n<a(x_n)^n<2b^n$ を証明せよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ．

$\boxed{8}$［2016 大分大］

自然数 n に対して関数 $y=2nx-x^2$ のグラフと x 軸で囲まれた領域 (境界を含む) R_n を考える。

(1)　領域 R_n に含まれる格子点 (x 座標と y 座標がともに整数である点) の数 S_n を求めよ。

(2)　点 A$(0,\ 0)$，B$(2n,\ 0)$，および関数 y の頂点を結ぶ線分で囲まれた領域 (境界を含む) に含まれる格子点の数 T_n を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$ を求めよ。

$\boxed{9}$ [1999 近畿大]

1から始まる連続した自然数の列を次のように群に分ける．第 n 群に含まれる自然数の個数は n^2 である．

$\{1\}$, $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14\}$, ……

第1群　第2群　第3群　……

(1) 第21群の最初の数は $^{\text{ア}}\boxed{}$ である．第12群の100番目の数は $^{\text{イ}}\boxed{}$ である．

(2) 1999は第 $^{\text{ウ}}\boxed{}$ 群の $^{\text{エ}}\boxed{}$ 番目の数である．

(3) 第 n 群の最初の数を a_n とすると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}={}^{\text{オ}}\boxed{}$$

である．また，第 n 群に含まれるすべての数の和を S_n とすると，ある自然数 k について数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n^k}\right\}$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$) は $n\longrightarrow\infty$ のとき収束する．このような k のうち最小のものは $k={}^{\text{カ}}\boxed{}$ であり，この k の値に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^k}={}^{\text{キ}}\boxed{}$$

となる．

$\boxed{10}$ [2014 横浜国立大]

実数 x に対して，$l\leqq x<l+1$ を満たす整数 l を $[x]$ と表す。数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\dfrac{n}{[\sqrt{n}\,]}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定め，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。

(1) S_3，S_8 を求めよ。

(2) S_{m^2-1} $(m=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ を m の式で表せ。

(3) 数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ。