

高2 数学B 1. 式の計算

□

① 同類項をまとめなければ

展開式のすべての項はそれぞれの

()内の項を1つずつかき合わせたものである

x^7 の項は x を7回、定数を1回かけ合わせたものより係数は

$$1+9+\dots+15 = \frac{1}{2} \cdot 8(1+15) = 64$$

② x^6 の項は x を6回、定数を2回かけ合わせたものより係数は

1.1	1.9	1.5		1.15
9.1	9.9	9.5		9.15
5.1	5.9	5.5	5.7	5.15
...	...	...	...	...
15.1	15.9	15.5		15.15

各行の和を求めればよい

$$\{(1+9+\dots+15)(1+9+\dots+15) + \text{上の表の和}\} \times \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} &= \{64 - \sum_{k=1}^8 (2k-1)^2\} \times \frac{1}{2} \\ &= \{64 - (4 \sum_{k=1}^8 k^2 - 4 \sum_{k=1}^8 k + \sum_{k=1}^8 1)\} \times \frac{1}{2} \\ &= (64 - 4 \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + 4 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} - 8) \times \frac{1}{2} \\ &= \{16(4 \cdot 64 - 5(1+9) - 8)\} \times \frac{1}{2} \\ &= \{16 \cdot 2(4 - 8)\} \times \frac{1}{2} \\ &= 8 \cdot 2(4 - 4) = 1708 \end{aligned}$$

注

二項定理の原理をテーマとした問題です

②

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy}$$

$$x^2+y^2 = (3\sqrt{2}+4) + (3\sqrt{2}-4) = 6\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} xy &= \sqrt{3\sqrt{2}+4} \sqrt{3\sqrt{2}-4} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{2}+4)(3\sqrt{2}-4)} \\ &= \sqrt{18-16} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

よって

$$\text{与式} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6$$

③

$$\begin{aligned} \text{① } x^2 + \frac{1}{x^2} &= (x + \frac{1}{x})^2 - 2 \\ &= a^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } (x - \frac{1}{x})^2 &= (x + \frac{1}{x})^2 - 4 \\ &= a^2 - 4 \end{aligned}$$

$$x > 1 \text{ であるから } x > \frac{1}{x} \text{ より}$$

$$x - \frac{1}{x} > 0 \text{ より}$$

$$x - \frac{1}{x} = \sqrt{a^2 - 4}$$

$$\begin{aligned} \text{③ } x^2 - \frac{1}{x^2} &= (x - \frac{1}{x})(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}) \\ &= \sqrt{a^2 - 4} (a^2 - 1) \end{aligned}$$

④

① 解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha\beta = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 1 - 4 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \leftarrow \alpha^2\beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha(\beta + \beta^2)) \text{ とはしない} \\ &= -1 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 \\ &= (-3)^2 - 2(\alpha\beta)^2 \\ &= 9 - 2 \cdot 4 = 1 \end{aligned}$$

$$\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha + \beta)(\alpha^4 + \beta^4) - \alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3) \\ = -1 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = \boxed{-11}$$

④ α^9, β^9 を2解とする2次方程式

で、 α^2 の1係数 α^2 のものは

$$\alpha^2 = (\alpha^4 + \beta^4)\alpha + \alpha^9\beta^9 = 0$$

ここで

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) \\ - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) \\ = 1 \cdot 6 - 1 - 16 \cdot (-1) = 5$$

$$\alpha^9\beta^9 = (\alpha\beta)^9 = 2^9 = 512$$

より

$$\alpha^2 - 5\alpha + 512 = 0$$

<point>

① 解と係数の関係 (2次)

② 対称式の計算

[5]

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha\beta = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 \\ = \frac{3}{2} + 2 + 1 = \boxed{\frac{9}{2}}$$

$\alpha' = \alpha - 1, \beta' = \beta - 1$ とおく

$$\alpha' + \beta' = \alpha + \beta - 2 = -4$$

$$\alpha'\beta' = (\alpha - 1)(\beta - 1) = \frac{9}{2}$$

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = (\alpha' + \beta')^2 - 2\alpha'\beta' \\ = 16 - 2 \cdot \frac{9}{2} = 7$$

$$(\alpha - 1)^4 + (\beta - 1)^4 = \alpha'^4 + \beta'^4 \\ = (\alpha'^2 + \beta'^2)^2 \\ = (\alpha'^2 + \beta'^2)^2 - 2(\alpha'\beta')^2 \\ = 49 - 2 \cdot \frac{81}{4} = \boxed{\frac{17}{2}}$$

注

$(\alpha - 1)^4 + (\beta - 1)^4$ は展開して

$\alpha^4 + \beta^4, \alpha^3 + \beta^3, \dots$ を計算してもよいが面倒

[6]

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4n \\ \alpha\beta = 4n \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 16n^2 - 8n$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 64n^3 - 12n^2$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) \\ = (16n^2 - 8n)(16n^2 - 8n) - 16n^2 \cdot 4n \\ = 256n^4 - 256n^3 + 64n^3 - 64n^3 \\ = 192n^4 - 128n^3$$

$$4n = \alpha + \beta = \boxed{10}$$

$$4n = \alpha\beta = (5 + 3\sqrt{2})(5 - 3\sqrt{2}) = 25 - 18 = \boxed{7}$$

$$\alpha^5 + \beta^5 = 10^5 - 5 \cdot 10^3 \cdot 7 + 5 \cdot 10 \cdot 7^2 \\ = 100000 - 35000 + 2450 \\ = \boxed{67450}$$

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5 \text{ より}$$

$$0.5 < 5 - 3\sqrt{2} < 0.8$$

$$\therefore 0 < \beta < 1 \quad \therefore 0 < \beta^5 < 1$$

よって α^5 の整数部分は $\boxed{67499}$

$$\alpha^5 - \beta^5 = \alpha^4 + \beta^4 - 2\beta^5$$

$\alpha^5 = 1024$ は覚えておいて
 $0.5 < \beta < 0.8$ より $\beta^5 < 0.8^5 < 0.33$ と推定できる

$$0 < \beta^4 < \frac{8^4}{10^4} = \frac{4096}{10000} < 0.5$$

$$0 < \beta^5 < \beta^4 < 0.5 \text{ より}$$

$$0 < \beta^5 < 0.5$$

よって $\alpha^5 - \beta^5$ の整数部分は $\boxed{67499}$

[7]

$$d) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \text{ より}$$

$$x^2 = 1 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca = \frac{x^2-1}{2} //$$

$$e) a^2+b^2+c^2-3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \text{ より}$$

$$-9 = x(1 - \frac{x^2-1}{2})$$

$$-9 = x \cdot \frac{2-x^2+1}{2}$$

$$-18 = x(2-x^2)$$

$$x^2-3x=18 //$$

<point>

① 3文字の対称式の計算

[8]

$$\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}$$

$$a=1$$

$$b=\sqrt{2}-1 \leftarrow N \text{ の素数部分} = N - N \text{ の素数部分}$$

$$a^2b+a^2+2ab^2+2ab+b^2+b^2 \quad \begin{matrix} \text{2文字の低い文字} \\ \text{に} \text{ついて整理} \end{matrix}$$

$$= (b+1)a^2+2b(b+1)a+b^2(b+1)$$

$$= (b+1)(a^2+2ab+b^2)$$

$$= (b+1)(a+b)^2$$

$$= \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2} //$$

注

分母の有理化をしたくなるようなところから
まずは割分できるかを確認しよう。

[9]

$$\begin{aligned} \frac{5}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} &= \frac{5}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2}} \\ &= \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-8} \\ &= \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2})}{2\sqrt{15}} \\ &= \frac{\sqrt{15}(\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2})}{6} \\ &= \frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}-2\sqrt{30}}{6} // \end{aligned}$$

<point>

① 分母の有理化

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

$$i) c=a+ba \text{ とする}$$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$ を分母、分子にかける

$$\text{分母} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - c$$

$$= a+2\sqrt{ab}+b-c$$

$$c=a+b \text{ より}$$

$$= 2\sqrt{ab}$$

となり簡単になる

$$ii) c \neq a+ba \text{ とする}$$

訂正にして

$$\text{分母} = (a+b-c)+2\sqrt{ab}$$

もう一回分母と分子に $(a+b-c)-2\sqrt{ab}$
をかかければ分母の有理化ができる

注

$c=a+b$ となるような組合せがあれば、

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ で割つてしまえばいい。

不細工な計算は避けた方がいい。

10

$$x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x > 0 \text{ より } x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{array}{r} t^2 - 3t - 2 \overline{) t^4 + 4t^3 + 1} \\ \underline{4t^3 + 11t^2 - 3t - 7} \\ 4t^3 - 12t^2 - 8t \\ \underline{13t^2 - 3t - 7} \\ 13t^2 - 12t^2 - 3t - 7 \\ \underline{t^2 - 3t - 7} \\ 8t - 5 \end{array}$$

$$t^4 + t^2 - 13t^2 - 3t - 7 = (t^2 - 3t - 2)(t^2 + 4t + 1) + 8t - 5 \leftarrow \text{恒等式}$$

$$t = x \text{ を代入して } x^2 - 3x - 2 = 0 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 - 13x^2 - 3x - 7 &= 8x - 5 \\ &= 4(3 + \sqrt{17}) - 5 \\ &= 7 + 4\sqrt{17} // \end{aligned}$$

<point>

① 次数下げ

11

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ より}$$

$$2x = 3 + \sqrt{5}$$

$$2x - 3 = \sqrt{5} \leftarrow \text{両辺を平方}$$

$$(2x - 3)^2 = 5$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 5$$

$$\therefore x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} 4t \overline{) t^2 - 3t + 1} \\ \underline{4t^2 - 12t + 4} \\ -9t - 3 \end{array}$$

$$4t^2 - 12t^2 + 10t - 1$$

$$= (t^2 - 3t + 1) \cdot 4t + 6t - 1$$

$t = x$ を代入して

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x^2 + 10x - 1 &= 6x - 1 \\ &= 9(3 + \sqrt{5}) - 1 \\ &= 8 + 9\sqrt{5} \end{aligned}$$

注: $x^2 = 3x - 1$ として次数下げしてもよい

② $(x^2 = 3x - 1) \Rightarrow x(3x - 1) = 3x^2 - x = 3(3x - 1) - x = 8x - 3$

① と ② の関係より $\begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha\beta = 3 \end{cases}$

$$x^2 + x + 1 = (x^2 + 2x + 3)(x - 1) - x + 4$$

$$x = d \text{ を代入して } x = d \text{ は } x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\therefore \text{ある } d \text{ に対して } d^2 + 2d + 3 = 0 \text{ より}$$

$$d^2 + d + 1 = -d + 4$$

② と同様にして

$$\beta^2 + \beta + 1 = -\beta + 4$$

よって

$$\begin{aligned} (d^2 + d + 1)(\beta^2 + \beta + 1) &= (-d + 4)(-\beta + 4) \\ &= d\beta - 4(d + \beta) + 16 \\ &= 3 + 8 + 16 = 27 // \end{aligned}$$

12

$$x = d \text{ は } x^2 + x + 1 = 0 \text{ の根より}$$

$$d^2 + d + 1 = 0$$

$$d^2 = -d - 1 \quad \text{--- ①}$$

両辺 d をかけると

$$\begin{aligned} d^3 &= -d^2 - d \\ &= -(-d - 1) - d \quad (\text{①より}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

同様に $\beta^3 = 1$

$$\begin{aligned} d^{2011} + \beta^{2011} &= (d^3)^{670} \cdot d + (\beta^3)^{670} \cdot \beta \\ &= d + \beta \end{aligned}$$

解と係数の関係から $d + \beta = -1$ より

$$= -1 //$$

注: この d, β は ω, ω^2 (ω は 1 の primitive 3 乗根)

$$\begin{array}{r} 670 \\ 9 \overline{) 2011} \\ 18 \\ \underline{21} \\ 9 \\ \underline{9} \\ 0 \end{array}$$