

高3 数学B 2. 恒等式・割り算の問題 [2]

[1]

題意より

$$f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad (a \neq 0) \text{ とおける}$$

$f(x)$ が $f(x)$ で割りきれるとき

$$ax^2 + bx + 1 = (ax^2 + bx + 1)(x^2 + cx + d)$$

$$ax^2 + bx + 1 = ax^2(ax + b)x^2 + (a + bc + d)x^2 + (b + c)x + 1$$

これから左側の x で割り立てるために

$$\begin{cases} ac + b = 0 \dots ① \\ a + bc + 1 = b \dots ② \\ b + c = 0 \dots ③ \end{cases}$$

③ より $b = -c$

① より

$$ac - c = 0$$

$$(a-1)c = 0 \quad \therefore a=1 \text{ or } c=0$$

$a=1$ のとき ④ より

$$2 - c^2 = -c$$

$$c^2 + c - 2 = 0$$

$$(c+2)(c-1) = 0 \quad \therefore c = -1, 2 \quad (b = 1, -2)$$

$c=0$ のとき ④ より

$$a+1=0 \quad \therefore a=-1 \quad (b=0)$$

よって

$$f(x) = x^2 + x + 1, x^2 - 2x + 1, -x^2 + 1$$

<point>

① 割り算の原理

割りきれるとき = 割る式 $\times$ 商 + あまり

あまりの次数 < 割る式の次数

$$d) (x^2+2)^4 = {}_4C_0 x^8 + {}_4C_1 x^6 \cdot 2 + {}_4C_2 x^4 \cdot 2^2 + {}_4C_3 x^2 \cdot 2^3 + {}_4C_4 2^4$$

$$= ({}_4C_0 x^8 + {}_4C_1 x^6 \cdot 2 + {}_4C_2 x^4 \cdot 2^2 + 92x + 16)$$

$$\therefore 7 \quad 92x + 16$$

$$e) t = x - 2 \text{ とおく } (x = t + 2)$$

$(t+2)^4$ を t^2 で割り、余りは $d)$ より

$$92t + 16$$

$t = x - 2$ より 求める余りは

$$92(x-2) + 16 = 92x - 168$$

[別解]

x^4 を $(x-2)^2$ で割り、 $r:16$ を Q の

余りを $ax^2 + b$ とおくと

$$x^4 = (x-2)^2 Q(x) + ax^2 + b \dots ①$$

両辺 x で微分して

$$4x^3 = 2(x-2)Q(x) + (x-2)^2 Q'(x) + a \dots ②$$

$$① \text{ において } x=2 \text{ を代入して } 16 = 2a + b \dots ③$$

$$② \text{ において } x=2 \text{ を代入して } 32 = a \dots ④$$

$$③, ④ \text{ より } a=32, b=-48$$

よって余りは $92x - 168$

他にも筆算や恒等式を利用して求める

$$e) (x+2)^n = {}_nC_0 x^n + {}_nC_1 x^{n-1} \cdot 2 + \dots + {}_nC_{n-2} x^2 \cdot 2^{n-2} + {}_nC_{n-1} x \cdot 2^{n-1} + {}_nC_n 2^n$$

$$= ({}_nC_0 x^{n-2} \cdot 2 + {}_nC_1 x^{n-3} \cdot 2^2 + \dots + 2^{n-2} {}_nC_{n-2}) x^2 + {}_nC_{n-1} 2^{n-1} x + 2^n$$

$$\therefore 7 \quad {}_nC_{n-1} 2^{n-1} x + 2^n$$

<point>

$$\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{n}{3} \dots$$

① 割る式の因数分解のものを念ふとき

に工夫が必要

③

$P(x)$ を $(x+1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$
余りを ax^2+bx+c とおく

$$P(x) = (x+1)^2(x-2)Q(x) + ax^2+bx+c$$

$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが $5x+2$ より

$$P(x) = (x+1)^2(x-2)Q(x) + a(x+1)^2 + 5x+2$$

$x=2$ を代入して

$$P(2) = 9a+12$$

$$P(2) = 9 \text{ より}$$

$$9 = 9a+12 \quad \therefore a = -1$$

よって求める余りは

$$-(x+1)^2 + 5x+2 = -x^2+3x+1$$

<point>

① 余りを変形して文字を減らす

④

① $P(x)$ を x^2-1 で割り、 $Q(x)$ を商、

余りを $ax^2+bx+c+d$ とおく

$$P(x) = (x^2-1)Q(x) + ax^2+bx+c+d$$

$$= (x+1)(x-1)(x^2-1)Q(x) + ax^2+bx+c+d$$

$$\therefore P(1) = 20, P(-1) = 4, P(i) = 4+4i$$

$x=1$ を代入して

$$20 = a+b+c+d \dots ①$$

$x=-1$ を代入して

$$4 = -a+b-c+d \dots ②$$

$x=i$ を代入して

$$4+4i = d-h+(c-a)i$$

$$d-h, c-a \in \mathbb{R} \text{ より}$$

$$\begin{cases} d-h=4 \dots ③ \\ c-a=4 \dots ④ \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \sim \textcircled{4} \text{ より } a=2, b=4, c=6, d=8$$

$$\therefore 2x^2+4x^2+6x+8$$

$$\textcircled{2} P(x) = (x^2-1)Q(x) + 2x^2+4x^2+6x+8$$

$$= (x-1)(x^2+x^2+x+1)Q(x) + 2(x^2+x^2+x+1) + 2x^2+4x+6$$

$$\therefore 2x^2+4x+6$$

$$\textcircled{3} P(x) = (x^2-1)Q(x) + 2x^2+4x^2+6x+8$$

$$= (x+1)(x^2-x^2+x-1)Q(x) + 2(x^2-x^2+x-1) + 6x^2+4x+10$$

$$\therefore 6x^2+4x+10$$

<point>

① x^2+a を因数に含むときは $x=\sqrt{-a}$ を代入する。(実部と虚部で2つ式が得られる)

⑤

① x^n を x^2-3x+2 で割ったときの

商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とおく

$$x^n = (x^2-3x+2)Q(x) + ax+b$$

$$x^n = (x-1)(x-2)Q(x) + ax+b$$

$x=1$ を代入して

$$a+b=1 \dots ①$$

$x=2$ を代入して

$$2a+b=2^n \dots ②$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } a=2^n-1, b=2-2^n$$

$$\therefore (2^n-1)x-2^n+2$$

② x^{2017} を x^2+x+1 で割ったときの

商を $Q(x)$, 余りを $cx+d$ とおく

$$x^{2017} = (x^2+x+1)Q(x) + cx+d$$

$x=\omega$ (ただし ω は $x^2=1$ の虚数解のうち)

を代入して

$$\omega^{2017} = c\omega+d$$

$$1 = c\omega+d$$

$$c, d \in \mathbb{R} \text{ より } c=0, d=1$$

$$\therefore \text{余りは } 1$$

<point>

① x^2+x+1 を因数に含むときは $x=w$ を代入する

② w ($x^3=1$ の虚数解の一つ)

① $w^3=1$

② $w^2+w+1=0$

③ $\bar{w}=w^2, (\bar{w}^2)=w$

④ $aw+b=0 \ (a, b \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow a=0, b=0$

[証明]

① $x^3=1$

$x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$ より $x \neq 1$

② $w = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ とおいて計算すればよい

④ ← 明らか

→

$a \cdot \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} + b = 0$

$(-\frac{1}{2}a+b) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}ai = 0$

$-\frac{1}{2}a+b, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}a \in \mathbb{R}$ より

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a+b=0 \\ \pm \frac{\sqrt{3}}{2}a=0 \end{cases} \therefore a=0, b=0 \quad \square$$

③ → ① もよく出てくる

$w^2+w+1=0$ より $w^2=-w-1 \dots ①$

両辺 w をかけて

$w^3=-w^2-w$

① より

$= -(-w-1)-w$

$= 1 \quad \square$

[6]

x^n を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とおくと

$x^n = (x-1)^2 Q(x) + ax+b \dots ①$

両辺 x で微分して

← 積の微分法

$n x^{n-1} = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + a \dots ②$

① に $x=1$ を代入して $a+b=1 \dots ③$

② に " " $a=0 \dots ④$

③, ④ より $a=0, b=1$

よって $n x^{n-1} - n x + 1$

[別解]

$t=x-1$ とおく

<point>

① 割り算式が $()^2, ()^3$ のときは微分を利用.