高3 数学β 3、方程式・不等式の解法 [3]

[1]

$ax+2=x+a^2$

$(a-1)x=a^2-2$

(i) $a\neq 1$ のとき

$x=\dfrac{a^2-2}{a-1}$ ← $a-1\neq 0$ なので両辺 $a-1$ で割ってよい

(ii) $a=1$ のとき

左辺$=0$、右辺$=-1$ より解なし。

<point>

① $ax=b$ $(a, b, x\in\mathbb{R})$

(i) $a\neq 0$ のとき $x=\dfrac{b}{a}$

(ii) $a=0$ のとき

(ア) $b=0$ のとき x はすべての実数

(イ) $b\neq 0$ のとき 解なし

注

1次方程式 $ax=b$ とあったら $a\neq 0$

[2]

$ax+3>2x$

$(a-2)x>-3$

(i) $a\neq 2$ のとき

(ア) $a>2$ のとき

$x>-\dfrac{3}{a-2}$

(イ) $a<2$ のとき

$x<-\dfrac{3}{a-2}$ ← 両辺負の数をかけたら不等号の向きが変わる

(ii) $a=2$ のとき

左辺$=0$、右辺$=-3$ より

すべての実数。

<point>

① $ax \gtrless b$

$$\begin{cases} x+(a-1)y=-1 & \cdots ① \\ ax+(a+3)y=1 & \cdots ② \end{cases}$$

$a\times ①-②$ より

$\{a(a-1)-(a+3)\}y=-2$

$(a^2-2a-3)y=-(a+1)$

$(a+1)(a-3)y=-(a+1)$

(i) $a\neq -1, 3$ のとき

$y=-\dfrac{1}{a-3}$、(① より $x=\dfrac{2}{a-3}$)

(ii) $a=-1$ のとき

左辺$=0$、右辺$=0$ より

y はすべての実数

(iii) $a=3$ のとき

左辺$=0$、右辺$=-4$ より 解なし

(i)〜(iii) より

$a=\boxed{3}$ のとき解が存在せず、

$a=\boxed{-1}$ のとき解が無数に存在する。

[4]

$(a-2)x^2+(4-a)x-2\geq 0$

(i) $a=2$ のとき

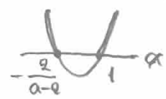
$2x-2\geq 0$ $\therefore x\geq 1$

(ii) $a>2$ のとき

$\{(a-2)x+2\}(x-1)\geq 0$

$\begin{array}{ccc} a-2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -(a-2) \\ \hline & & 4-a \end{array}$

$-\dfrac{2}{a-2}<1$ より



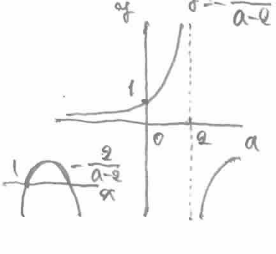
$x\leq -\dfrac{2}{a-2}$、$x\geq 1$

(iii) $a<2$ のとき

(ア) $0<a<2$ のとき

$1<-\dfrac{2}{a-2}$ より

$1\leq x\leq -\dfrac{2}{a-2}$



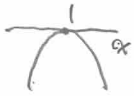
ii) $a<0$ のとき

$-\frac{2}{a-2}<1$ より

$-\frac{2}{a-2}\leqq x\leqq 1$

iii) $a=0$ のとき

$-\frac{2}{a-2}=1$ より



$x=1$ //

〈point〉

① x^2の係数に文字を含む不等式.

[5]

$\frac{(1-x)^2}{3-x}\leqq 1$

3−xは正にも負にもなるが $(3-x)^2>0$

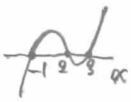
両辺 $(3-x)^2>0$ をかけて

$(1-x)^2(3-x)\leqq(3-x)^2$

$(3-x)\{(1-x)^2-(3-x)\}\leqq 0$

$(x-3)(x^2-x-2)\geqq 0$

$(x-3)(x+1)(x-2)\geqq 0$



∴ $-1\leqq x\leqq 2,\ x\geqq 3$ //

〈point〉

① 分数関数を含む不等式.

[6]

$$\begin{cases} x^2-2y=8 & \cdots ① \\ y^2-2x=8 & \cdots ② \end{cases}$$

①−② より

$x^2-2y-y^2+2x=0$

$(x+y)(x-y)+2(x-y)=0$

$(x-y)(x+y+2)=0$

∴ $y=x,\ y=-x-2$.

i) $y=x$ のとき

① より

$x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$ ∴ $x=-2,4$

よって

$(x,y)=(-2,-2),(4,4)$

ii) $y=-x-2$ のとき

① より

$x^2-2(-x-2)=8$

$x^2+2x-4=0$ ∴ $x=-2\pm\sqrt{5}$

よって

$(x,y)=(-2+\sqrt{5},-\sqrt{5}),(-2-\sqrt{5},\sqrt{5})$ //

〈point〉

① 連立2元2次連立方程式.

[7]

$$\begin{cases} x^2+y^2+3xy=11 \\ x+y-xy=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2+xy=11 \\ x+y-xy=9 \end{cases}$$

$s=x+y,\ t=xy$ とおくと

$$\begin{cases} s^2+t=11 & \cdots ① \\ s-t=9 & \cdots ② \end{cases}$$

①+② より

$s^2+s=20$

$s^2+s-20=0$

$(s+5)(s-4)=0$ ∴ $s=-5,4$

よって

$(s,t)=(\overset{ア}{\boxed{-5}},\overset{イ}{\boxed{-14}}),(\overset{ウ}{\boxed{4}},\overset{エ}{\boxed{-5}})$

i) $(x+y,xy)=(-5,-14)$ のとき

x,y を2解とする2次方程式の1つは

$t^2-(x+y)t+xy=0$

$t^2+5t-14=0$

$(t+7)(t-2)=0$ ∴ $t=-7,2$.

$x<y$ となるのは

$(x, y)=(\overset{\text{オ}}{\boxed{-7}}, \overset{\text{カ}}{\boxed{2}})$

ii) $(x+y, xy)=(4, -5)$ のとき

x, y を2解とする2次方程式の1つは

$t^2-(x+y)t+xy=0$

$t^2-4t-5=0$

$(t+1)(t-5)=0 \quad \therefore t=-1, 5$

$x<y$ となるのは

$(x, y)=(\overset{\text{キ}}{\boxed{-1}}, \overset{\text{ク}}{\boxed{5}})$

<point>

① 2元2次連立方程式(対称式型)

$\boxed{8}$

共通解を α とすると

$$\begin{cases} \alpha^2+2a\alpha+10=0 & \cdots ① \\ \alpha^2+5\alpha+4a=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①−② より

$2a(\alpha-2)-5(\alpha-2)=0$

$(2a-5)(\alpha-2)=0$

$\therefore a=\frac{5}{2}, \alpha=2$

$a=\frac{5}{2}$ のとき ①と②は同じ方程式となるので不適

$\alpha=2$ のとき ① より

$4+4a+10=0 \quad \therefore a=-\frac{7}{2}$

よって

$a=\boxed{-\frac{7}{2}}$ のとき 共通解は $x=\boxed{2}$

<point>

① 共通解

$\boxed{9}$

$x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$

両辺 $x^2 (\neq 0)$ で割ると

$x^2-7x+14-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+12=0$

$t=x+\frac{1}{x}$ とおくと

$\overset{\text{ア}}{\boxed{t^2-7t+12}}=0$

$(t-3)(t-4)=0 \quad \therefore t=\overset{\text{イ}}{\boxed{3}}, \overset{\text{ウ}}{\boxed{4}}$

i) $t=3$ のとき

$x+\frac{1}{x}=3$

$x^2-3x+1=0 \quad \therefore x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

ii) $t=4$ のとき

$x+\frac{1}{x}=4$

$x^2-4x+1 \quad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$

i), ii) より最大の解は $x=\overset{\text{エ}}{\boxed{2+\sqrt{3}}}$

<point>

① 相反方程式(4次)

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \quad (a\neq 0)$

注

5次の相反方程式もたまに見かけます

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$

これは $x=-1$ を必ず解にもち

$(x+1)$(4次の相反方程式)$=0$ となるのであとは4次の相反方程式を解くだけ.

$\boxed{10}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & 5 & 5 & 0 & -2 \\ & & -2 & -3 & -2 & 2 \\ \hline & 2 & 3 & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

$2x^4+5x^3+5x^2-2=0$

$(x+1)(2x^3+3x^2+2x-2)=0$

$(x+1)(x-\frac{1}{2})(2x^2+4x+4)=0$

$(2x-1)\ (x^2+2x+2)$

$x^2+2x+2=0$ の判別式をDとすると $D=-1<0$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 3 & 2 & -2 \\ & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 2 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

より $x^2+2x+2=0$ は実数解をもたないので

$x=-1,\ \frac{1}{2}$ 〃

<point>

① 因数定理.

$\boxed{11}$

$|x^2-4x+3|=|2x-5|$

$|x^2-4x+3|=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x\leqq 1,\ x\geqq 3) \\ -(x^2-4x+3) & (1<x<3) \end{cases}$

$(x-1)(x-3)$

$|2x-5|=\begin{cases} 2x-5 & (x\geqq \frac{5}{2}) \\ -(2x-5) & (x<\frac{5}{2}) \end{cases}$

i) $x\leqq 1$ のとき

$x^2-4x+3=-(2x-5)$

$x^2-2x-2=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{3}$

$x\leqq 1$ より $x=1-\sqrt{3}$

ii) $1<x<\frac{5}{2}$ のとき

$-(x^2-4x+3)=-(2x-5)$

$x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$ $\therefore x=2,\ 4$

$1<x<\frac{5}{2}$ より $x=2$

iii) $\frac{5}{2}\leqq x<3$ のとき

$-(x^2-4x+3)=2x-5$ ← i)と同じ

$x=1\pm\sqrt{3}$

$\frac{5}{2}\leqq x<3$ より $x=1+\sqrt{3}$

iv) $x\geqq 3$ のとき

$x^2-4x+3=2x-5$ ← ii)と同じ

$x=2,\ 4$

$x\geqq 3$ より $x=4$

i)～iv)より

$x=2,\ 4,\ 1\pm\sqrt{3}$

[別解]

$y=|x^2-4x+3|$ と $y=|2x-5|$ のグラフの交点の x 座標として求めてもよい。

[別解2]

$|x^2-4x+3|=|2x-5|$

$x^2-4x+3=\pm(2x-5)$

i) $x^2-4x+3=2x-5$

$x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$ $\therefore x=2,\ 4$

ii) $x^2-4x+3=-(2x-5)$

$x^2-2x-2=0$ $\therefore x=1\pm\sqrt{3}$

i), ii) より

$x=2,\ 4,\ 1\pm\sqrt{3}$ 〃

<point>

① $|A|=|B|$

$(|A|,\ |B|\geqq 0)$

$\Leftrightarrow A^2=B^2$ ← $A\geqq 0,\ B\geqq 0$ のとき $A=B \Leftrightarrow A^2=B^2$

$\Leftrightarrow A^2-B^2=0$

$\Leftrightarrow (A+B)(A-B)=0$

$\Leftrightarrow \therefore A=\pm B$ $(B=\pm A)$

$\boxed{12}$

$|x^2-4x+3|=2-x.$

$|x^2-4x+3|=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x\leqq 1,\ x\geqq 3) \\ -(x^2-4x+3) & (1<x<3) \end{cases}$

i) $x\leqq 1,\ x\geqq 3$ のとき

$x^2-4x+3=2-x$

$x^2-3x+1=0$ $\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$x\leqq 1,\ x\geqq 3$ より $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

iii) $1<x<3$ のとき

$$x^2-4x+3=-(2-x)$$

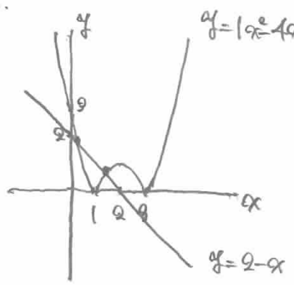
$$x^2-5x+5=0 \qquad \therefore x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

$1<x<3$ より $x=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

i), iii) より

$$x=\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}\ /\!/$$

注.



グラフを利用すれば解の適.不適はすぐにわかる.

注

$|x^2-4x+3|=2-x$ より $2-x\geqq 0$

$|x^2-4x+3|=2-x$

$\Leftrightarrow x^2-4x+3=\pm(2-x)$ かつ $2-x\geqq 0$

$|A|=B$

($|A|\geqq 0$ であるから $B\geqq 0$)

$\Leftrightarrow A^2=B^2$ かつ $B\geqq 0$ ← $|A|^2=A^2$

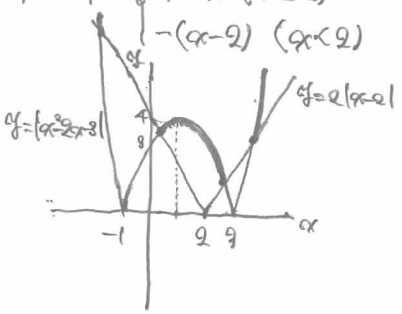
$\Leftrightarrow (A+B)(A-B)=0$ かつ $B\geqq 0$ ⇔ $A=\pm B$. ($B=\pm A$) かつ $B\geqq 0$.

[19]

$$|x^2-2x-3|\geqq 2|x-2|$$

$$|x^2-2x-3|=\begin{cases}x^2-2x-3 & (x\leqq -1,\ x\geqq 3)\\ -(x^2-2x-3) & (-1<x<3)\end{cases}$$

$$|x-2|=\begin{cases}x-2 & (x\geqq 2)\\ -(x-2) & (x<2)\end{cases}$$



$y=|x^2-2x-3|$ の y 座標 $\geqq$ $y=2|x-2|$ の y 座標となる x の範囲を求めればよい

$y=|x^2-2x-3|$ と $y=|x-2|$ の交点の x 座標は

i) $x\leqq -1$ のとき

$$x^2-2x-3=-2(x-2)$$

$$x^2-7=0 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{7}$$

$x\leqq -1$ より $x=-\sqrt{7}$

ii) $-1<x\leqq 2$ のとき

$$-(x^2-2x-3)=-2(x-2)$$

$$x^2-4x+1=0 \qquad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$$

$-1<x\leqq 2$ より $x=2-\sqrt{3}$

iii) $2\leqq x<3$ のとき

$-(x^2-2x-3)=2(x-2)$ ← i)と同じ

$2\leqq x<3$ より $x=\sqrt{7}$

iv) $x\geqq 3$ のとき

$x^2-2x-3=2(x-2)$ ← ii)と同じ

$x\geqq 3$ より $x=2+\sqrt{3}$

グラフより

$x\leqq -\sqrt{7}$ or $2-\sqrt{3}\leqq x\leqq \sqrt{7}$ or $x\geqq 2+\sqrt{3}$ //

[別解]

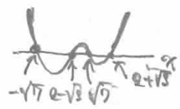
$|x^2-2x-3|\geqq 2|x-2|$

$(x^2-2x-3)^2\geqq 4(x-2)^2$ ← $A, B\geqq 0$ のとき $A\geqq B \Leftrightarrow A^2\geqq B^2$

$(x^2-2x-3)^2-4(x-2)^2\geqq 0$

$\{(x^2-2x-3)+2(x-2)\}\{(x^2-2x-3)-2(x-2)\}\geqq 0$

$(x^2-7)(x^2-4x+1)\geqq 0$



$\therefore x\leqq -\sqrt{7}$ or $2-\sqrt{3}\leqq x\leqq \sqrt{7}$ or $x\geqq 2+\sqrt{3}$ //

14

$|x^2-2x-3| \leqq 3-x$

$|x^2-2x-3| = \begin{cases} x^2-2x-3 & (x \leqq -1,\ x \geqq 3) \\ -(x^2-2x-3) & (-1 < x < 3) \end{cases}$

i) $x \leqq -1,\ x \geqq 3$ のとき

$x^2-2x-3 \leqq 3-x$

$x^2-x-6 \leqq 0$

$(x+2)(x-3) \leqq 0$ $\therefore -2 \leqq x \leqq 3$

$x \leqq -1,\ x \geqq 3$ より

$-2 \leqq x \leqq -1,\ x=3$

ii) $-1 < x < 3$ のとき

$-(x^2-2x-3) \leqq 3-x$

$x^2-3x \geqq 0$

$x(x-3) \geqq 0$ $\therefore x \leqq 0,\ x \geqq 3$

$-1 < x < 3$ より

$-1 < x \leqq 0.$

i), ii) より

$-2 \leqq x \leqq 0$ or $x=3$ //

[別解]

$|x^2-2x-3| \leqq 3-x$

$\Leftrightarrow -(3-x) \leqq x^2-2x-3 \leqq 3-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -(3-x) \leqq x^2-2x-3 \\ \text{かつ} \\ x^2-2x-3 \leqq 3-x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x \geqq 0 \\ x^2-x-6 \leqq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqq 0 \text{ or } x \geqq 3 \\ -2 \leqq x \leqq 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -2 \leqq x \leqq 0$ or $x=3$ //

注.

$|A| \leqq B \Leftrightarrow -B \leqq A \leqq B$

i) $B \geqq 0$ のとき

明らか

ii) $B < 0$ のとき

$|A| \leqq B$ は解なし.

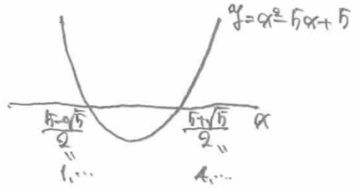
$-B \leqq A \leqq B$ も $-B > B$ より解なし □

15

(1) $y = x^2-5x+5$ $(x \in \mathbb{R})$ のグラフを考える

x軸との交点のx座標は

$x^2-5x+5=0$ $\therefore x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$



$n^2-5n+5<0$ となるのは

$n = 2, 3, 4$ //

(2) $[x]=n$ $(n \in \mathbb{Z})$ とおくと ← $[x] \in \mathbb{Z}$

$n^2-5n+5<0.$

これを満たすnは(1)より $n=2, 3, 4.$

$[x]=n$ のとき $n \leqq x < n+1$ より

$2 \leqq x < 5$ //

(3) i) $2 \leqq x < 3$ のとき

$[x]=2$ より

$x^2=5$ $\therefore x = \pm\sqrt{5}$

$2 \leqq x < 3$ より $x=\sqrt{5}$

ii) $3 \leqq x < 4$ のとき

$[x]=3$ より

$x^2=10$ $\therefore x=\pm\sqrt{10}$

$3 \leqq x < 4$ より $x=\sqrt{10}$

iii) $4 \leqq x < 5$ のとき

$[x]=4$ より

$x^2=15$ $\therefore x=\pm\sqrt{15}$

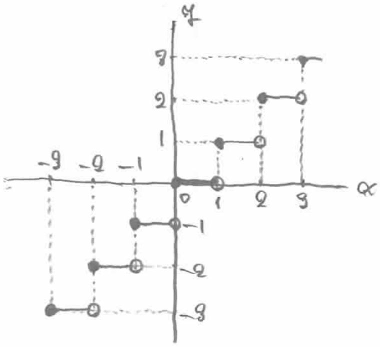
$4 \leqq x < 5$ より 不適

i)〜iii) より $x=\sqrt{5}, \sqrt{10}$ //

$\boxed{16}$

1) $y=[x]$

$=k \quad (k\in\mathbb{Z},\ k\leqq x<k+1)$



//

2) i) $n\leqq x<n+0.5$ のとき $(n\in\mathbb{Z})$

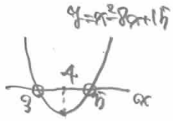
$[x]=n,\ [x-0.5]=n-1$ より

$n^2-8(n-1)+7<0$

$n^2-8n+15<0$

$(n-3)(n-5)<0$

$\therefore n=4$



よって

$4\leqq x<4.5$

ii) $n+0.5\leqq x<n+1$ のとき $(n\in\mathbb{Z})$

$[x]=n,\ [x-0.5]=n$ より

$n^2-8n+7<0$

$(n-1)(n-7)<0$

$\therefore n=2,3,4,5,6$

よって

$2.5\leqq x<3,\ 3.5\leqq x<4,$

$4.5\leqq x<5,\ 5.5\leqq x<6$

$6.5\leqq x<7$

i), ii) より

$2.5\leqq x<3,\ 3.5\leqq x<5$

$5.5\leqq x<6,\ 6.5\leqq x<7$ //