

高3 数学B 4. 関数とグラフ

①

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

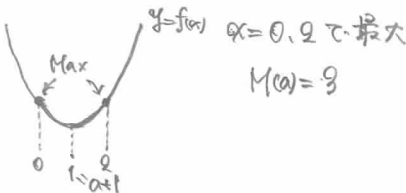
$$= (x-1)^2 + 2$$

$y = f(x)$ のグラフは

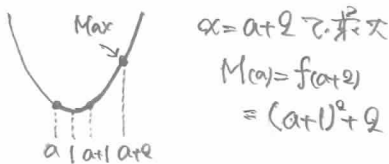
下に凸、頂点 (1, 2)

最大値

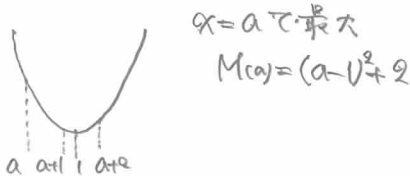
① $a = 0$ のとき $\leftarrow$ 区間の真ん中 $x = a+1$ が x -軸 $x=1$ と重なるとき



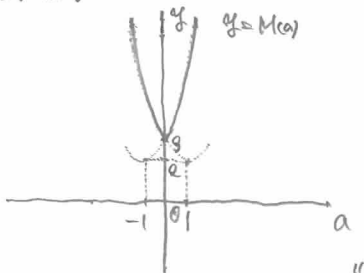
② $a > 0$ のとき $\leftarrow a+1 > 1$ のとき



③ $a < 0$ のとき $\leftarrow a+1 < 1$ のとき

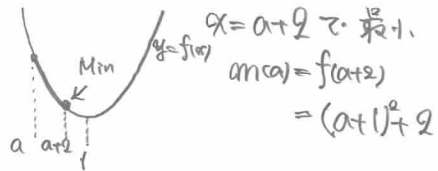


① ~ ③ より

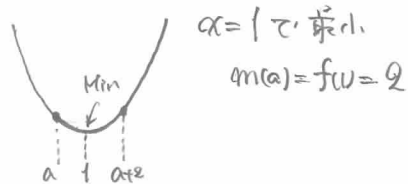


最小値

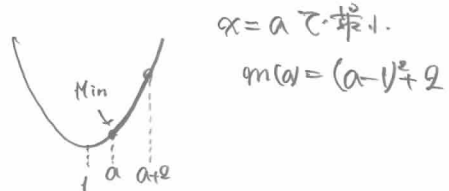
④ $a < -1$ のとき $\leftarrow a+2 < 1$ のとき



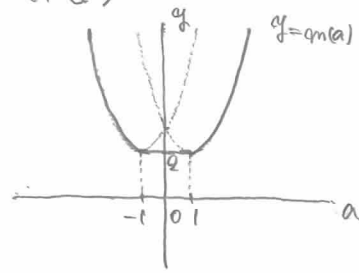
⑤ $-1 \leq a < 1$ のとき $\leftarrow a+1 \leq a+2$ のとき



⑥ $a \geq 1$ のとき



① ~ ⑥ より



[別解]

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$= (x-1)^2 + 2$$

の最大・最小値は $y = f(x)$ の頂点か、端点でとる

頂点 $f(1) = 2$ ($a \leq 1 \leq a+2$ すなわち $-1 \leq a \leq 1$)

$\uparrow$ 頂点が定義域内に入っていない場合は
頂点で最大・最小とはならない

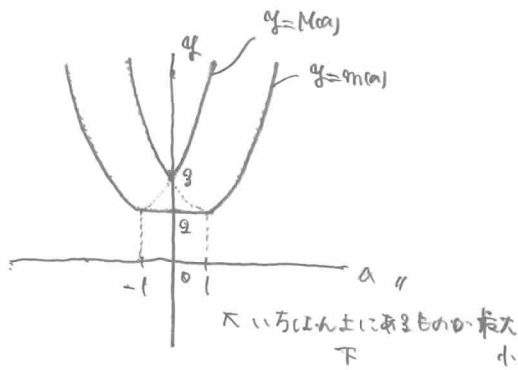
端点 $f(a) = (a-1)^2 + 2$

$f(a+2) = (a+1)^2 + 2$ $\leftarrow$ 端点は常に存在

$y = f(x)$ ($-1 \leq a \leq 1$, $y = f(a)$, $y = f(a+2)$) のうち

最大のものが $M(a)$

$\downarrow$ $m(a)$ である



②

$$f(a) = a^2 - 2a + 2a = (a-1)^2 - a^2 + 2a$$

$y = f(a)$ のグラフは

下に凸で、頂点 $(1, -a^2 + 2a)$

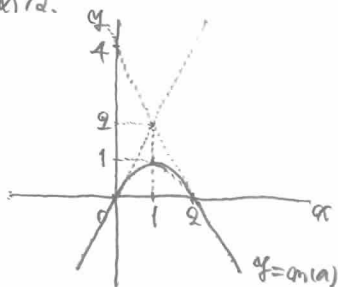
$f(a)$ の最小値は $y = f(a)$ の頂点か、端点でとる

$$\text{頂点 } f(a) = -a^2 + 2a \quad (0 \leq a \leq 2)$$

$$\text{端点 } f(a) = 2a = -(a-1)^2 + 1$$

$$f(a) = -2a + 4$$

$y = f(a) \quad (0 \leq a \leq 2)$, $y = f(a)$, $y = f(a)$ のうち
最小のものから $f(a) \quad (0 \leq a \leq 2)$ の最小値
である。



グラフより

$m(a)$ の最大値は $1 \quad (a=1)$

③

$$f(x, y) = x^2 - 4xy + 5y^2 + 2y + 2$$

$$= (x-2y)^2 + y^2 + 2y + 2$$

$$= (x-2y)^2 + (y+1)^2 + 1$$

$y = -1, x = -2$ のとき最小

最小値 1

④ $y = a$ のとき $(a \geq 0)$

$$f(x, a) = x^2 - 4ax + 5a^2 + 2a + 2$$

$$= (x-2a)^2 + a^2 + 2a + 2$$

$y = f(x, a)$ のグラフは

下に凸で、頂点 $(2a, a^2 + 2a + 2)$

$f(x, a)$ の最小値は $y = f(x, a)$ の頂点か、
端点でとる

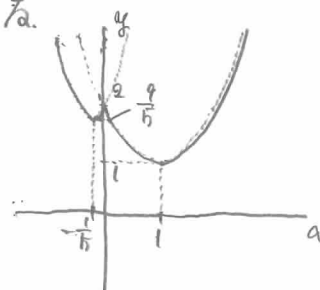
$$= (a+1)^2 + 1$$

$$\text{頂点 } f(2a, a) = a^2 + 2a + 2 \quad (a \geq 0)$$

$$\text{端点 } f(0, a) = 5a^2 + 2a + 2 = 5\left(a + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}$$

$y = f(2a, a) \quad (a \geq 0)$, $y = f(0, a)$ のうち

最小のものから $f(x, a) \quad (x \geq 0)$ の最小値で
ある。



$a \geq 0$ より $a = 1$ のとき $f(x, a)$ は

最小値 1 をとる

このとき $x = 2a = 2, y = a = 1$

注 $f(2a, a)$ の方が最小値をとる

x, y の空間内で $z = f(x, y)$ は x, y の空間
内の曲面を表す。

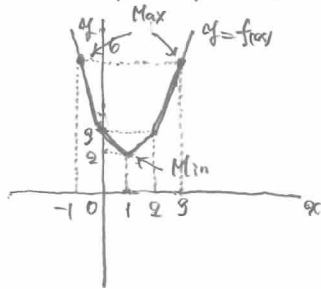
$y = a$ のとき $z = f(x, a)$ は

$z = f(x, a)$ は曲線を表し (この場合は
二次曲線) その最小値を求め、 a を動か
して最小値の最小値を求めている。

4

$$f(x) = |x| + |x-1| + |x-2|$$

	0	1	2	
$ x $	$-x$	x	x	x
$ x-1 $	$-(x-1)$	$-(x-1)$	$x-1$	$x-1$
$ x-2 $	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$x-2$
$f(x)$	$-3x+3$	$-x+3$	$x+1$	$3x-3$



グラフより

最大値 6 ($x=-1, 3$)

最小値 2 ($x=1$)

5

$$f(x) = |2x+1| + |x-1| + 2|x-a| \text{ とおく}$$

$$= 2|x+\frac{1}{2}| + |x-1| + 2|x-a|$$

i) $0 < a < 1$ のとき

x	$-\frac{1}{2}$	a	1	
$f(x)-5$	$\times$	-3	$\times$	5
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

$\leftarrow y=f(x)$ の傾き
 $\times$ は x と a の位置関係が
 $\nearrow$ は $x < a$ のとき

$x=a$ で最小

$$\begin{aligned} \text{最小値 } f(x) &= |2a+1| + |a-1| \\ &= 2a+1-(a-1) \\ &= a+2 \end{aligned}$$

ii) $a=1$ のとき

$$f(x) = 2|x+\frac{1}{2}| + 3|x-1|$$

x	$-\frac{1}{2}$	1	
$f(x)-5$	$\times$	-1	$\times$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$x=1$ で最小

$$\text{最小値 } f(x) = 3$$

iii) $a > 1$ のとき

x	$-\frac{1}{2}$	1	a	
$f(x)-5$	$\times$	-1	$\times$	5
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

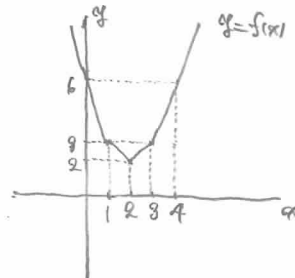
$x=1$ で最小

$$\begin{aligned} \text{最小値 } f(x) &= 3+2|1-a| \\ &= 3-2(1-a) \\ &= 2a+1 \end{aligned}$$

6

i) $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ とおく

x	1	2	3	
$f(x)-3$	$\times$	-1	$\times$	3
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$



ii) $f(x) = \sum_{k=1}^{2m+1} |x-k|$ とおく

$f(x)$ は高々 1 だけである

$x=k$ ($k=1, 2, \dots, 2m+1$) で 1 だけである
 替わる

$$\begin{aligned} f(x) - f(x) &= \sum_{k=1}^{2m+1} |x-k| - \sum_{k=1}^{2m+1} |x-k| \\ &= |x-1| + |x-2| + \dots + |x-2m| \\ &\quad - (|x-1| + |x-2| + \dots + |x-(2m+1)|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |x-1| - |x-(2m+1)| \\ &= x + (x-(2m+1)) \\ &= 2x - (2m+1) \end{aligned}$$

$1 \leq x \leq m$ のとき $f(x) - f(x) < 0$
 $\therefore f(x) > f(x)$

$m+1 \leq x \leq 2m$ のとき $f(x) - f(x) > 0$
 $\therefore f(x) < f(x)$

$x \leq 1$ のとき $f(x) = -(2n+1)$

$x \geq 2n+1$ のとき $f(x) = 2n+1$ より

$x = n+1$ のとき 最小

最小値は

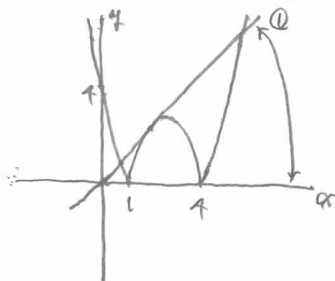
$$\begin{aligned} f(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} |(n+1) - k| \\ &= |n| + |n-1| + \dots + |n-n| + \dots + |-n| \\ &= 2(1+2+\dots+n) \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

[7]

$|x^2 - 5x + 4| = m\alpha$ の異なる4個の実数解をもつとき

$y = |x^2 - 5x + 4|$ と $y = m\alpha$ の異なる4点で交わるようにする

$$\begin{aligned} y &= |x^2 - 5x + 4| = |(x-1)(x-4)| \\ &= \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & (x \leq 1, x \geq 4) \\ -(x^2 - 5x + 4) & (1 < x < 4) \end{cases} \end{aligned}$$



①のとき

$1 \leq \alpha \leq 4$

$y = -(x^2 - 5x + 4)$ と $y = m\alpha$ の交点をもつ

から

$$-(x^2 - 5x + 4) = m\alpha$$

$$x^2 + (m-5)x + 4 = 0$$

4重解をもてはよい

判別式をDとして

$$D = (m-5)^2 - 16$$

$$= m^2 - 10m + 9$$

$$= (m-1)(m-9) = 0 \quad \text{from } x = -\frac{m-5}{2}$$

重解は $1 \leq \alpha \leq 4$ より $m = 1$

7より $0 \leq m < 1$

α, β を $\alpha \leq 1, \alpha \geq 4$ で取る

γ, δ を $1 < \alpha < 4$ で取る

α, β は

$$x^2 - 5x + 4 = m\alpha$$

$$x^2 - (m+5)x + 4 = 0$$

の解で取らる解は1組のみより

$$\begin{cases} \alpha + \beta = m+5 \\ \alpha\beta = 4 \end{cases}$$

γ, δ は

$$x^2 + (m+5)x + 4 = 0$$

の解より

$$\begin{cases} \gamma + \delta = -(m+5) \\ \gamma\delta = 4 \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta} \\ &= \frac{m+5}{4} - \frac{m+5}{4} = 0 \end{aligned}$$

[8]

$$i) |x^2 - x - 2| = \alpha$$

$$|x^2 - x - 2| = \begin{cases} x^2 - x - 2 & (x \leq -1, x \geq 2) \\ -(x^2 - x - 2) & (-1 < x < 2) \end{cases}$$

ii) $x \leq -1, x \geq 2$ のとき

$$x^2 - x - 2 = \alpha$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \therefore x = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x \leq -1, x \geq 2 \text{ より } x = 1 + \sqrt{3}$$

iii) $-1 < x < 2$ のとき

$$-(x^2 - x - 2) = \alpha$$

$$x^2 - 2 = 0 \quad \therefore x = \pm\sqrt{2}$$

$$-1 < x < 2 \text{ より } x = \sqrt{2}$$

ii), iii) より $x = \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3}$

$$2) |x^2 - x - 2| = x + k$$

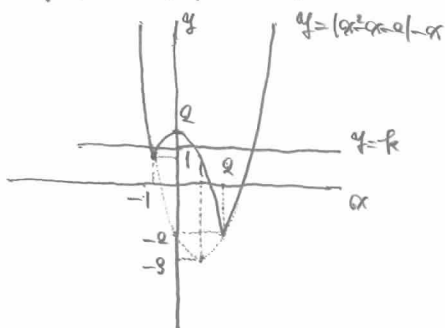
$$|x^2 - x - 2| - x = k \leftarrow \text{定数分離}$$

①の解の個数をいふ

$y = |x^2 - x - 2| - x$ と $y = k$ の交点の個数をいふといふ

$$y = |x^2 - x - 2| - x = (x-1)^2 - 2$$

$$= \begin{cases} x^2 - 2x - 2 & (x \leq -1, x \geq 2) \\ -x^2 + 2 & (-1 < x < 2) \end{cases}$$



7-37より①の解の個数は

$k < -2$ のとき 0個

$k = -2$ " 1個

$-2 < k < 1$ " 2個

$k = 1$ " 3個

$1 < k < 2$ " 4個

$k = 2$ " 3個

$k > 2$ " 2個

② $x \leq -1, x \geq 2$ における解を d_1, d_2

$-1 < x < 2$ " d_3, d_4 と

する

d_1, d_2 について

$$x^2 - 2x - 2 = k$$

$$x^2 - 2x - k - 2 = 0$$

①の解であるから解と係数の関係

より

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 2 \\ d_1 d_2 = -k - 2 \end{cases}$$

d_3, d_4 について

$$-x^2 + k = 0$$

$$x^2 + k - 2 = 0$$

①の解より

$$\begin{cases} d_3 + d_4 = 0 \\ d_3 d_4 = k - 2 \end{cases}$$

よって

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 2$$

$$d_1 d_2 d_3 d_4 = -(k+2)(k-2)$$

$$= 4 - k^2$$

注

④において①の解の個数を

$y = |x^2 - x - 2|$ と $y = x + k$ の交点の個数と

してもよいが、少し面倒。