高3数学β　5. 最大・最小

[1]

$$\frac{a^2+5a+4}{a} = a + \frac{4}{a} + 5$$

$a, \frac{4}{a} > 0$ であるから相加相乗平均より

$$\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}} + 5$$

$$= 9$$

等号成立は $a=\frac{4}{a}$ すなわち $a=2$ のとき

最小値は 9

〈point〉

① 相加相乗平均

注.

$a, \frac{4}{a}>0$ であれば 与式 ≥ 9 は常に成立するが 9 の値をとるとは限らない (例えば $a\geq 3$ のとき) ので 9 の値をとる a が定義域内に存在することを示してから 9 を最小値とすること

[2]

$x^2-6x+13$ を $x-3$ でわる

$$\frac{x^2-6x+13}{x-3} = \frac{(x-3)(x-3)+4}{(x-3)}$$

$$= x-3+\frac{4}{x-3}$$

$x-3, \frac{4}{x-3} > 0$ であるから相加相乗平均より

$$\geq 2\sqrt{(x-3)\cdot\frac{4}{x-3}} = 4$$

等号成立は $x-3=\frac{4}{x-3}$ すなわち $x=5$ のとき

最小値は 4

[3]

(1) 相加相乗平均より

$$x+\frac{16}{x} \geq 2\sqrt{x\cdot\frac{16}{x}} = 8$$

等号成立は $x=\frac{16}{x}$ すなわち $x=4$ のとき

最小値 $\boxed{8}$

$$x+\frac{16}{x+2} = x+2+\frac{16}{x+2} - 2$$

同じ形を作る

相加相乗平均より

$$\geq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{16}{x+2}} - 2 = 6$$

等号成立は $x+2 = \frac{16}{x+2}$ すなわち $x=2$ のとき

最小値 $\boxed{6}$

(2)

$$\frac{x}{x^2+16} = \frac{1}{\frac{x^2+16}{x}} = \frac{1}{x+\frac{16}{x}}$$

$x+\frac{16}{x}\geq 8$ より

$$\leq \frac{1}{8}$$

等号成立は $x=4$ のとき

最大値 $\boxed{\frac{1}{8}}$ $(x=\boxed{4})$

$$\frac{x+2}{x^2+2x+16} = \frac{1}{\frac{x^2+2x+16}{x+2}} = \frac{1}{\frac{(x+2)x+16}{x+2}}$$

$$= \frac{1}{x+\frac{16}{x+2}}$$

$x+\frac{16}{x+2}\geq 6$ より

$$\leq \frac{1}{6}$$

等号成立は $x=2$ のとき

最大値 $\boxed{\frac{1}{6}}$ $(x=\boxed{2})$

〈point〉

① $\frac{1次}{2次} = \frac{1}{\frac{2次}{1次}}$ になおす

4

$$x^2-x+1 \overline{) x^4-2x^3+2x^2-x+4 }$$
quotient: x^2-x
$$x^4-x^3+x^2$$
$$-x^3+x^2-x$$
$$-x^3+x^2-x$$
$$4$$

$$\frac{x^4-2x^3+2x^2-x+4}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{(x^2-x+1)(x^2-x)+4}{x^2-x+1}$$
$$=x^2-x+\frac{4}{x^2-x+1}$$
$$=x^2-x+1+\frac{4}{x^2-x+1}-1$$

$x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ であるから

相加相乗平均より

$$\ge 2\sqrt{(x^2-x+1)\cdot\frac{4}{x^2-x+1}}-1=3$$

等号成立は

$$x^2-x+1=\frac{4}{x^2-x+1}$$
$$(x^2-x+1)^2=4$$

$x^2-x+1>0$ より

$$x^2-x+1=2$$

$x^2-x-1=0$　∴ $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

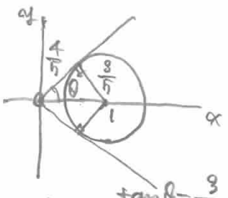
のとき

最小値 3

5

(1) $x^2+y^2-2x+\frac{16}{25}=0$

$(x-1)^2+y^2=\frac{9}{25}$ …①



中心 $(1, 0)$, 半径 $\frac{3}{5}$ の円と

$t=\frac{y}{x}$ すなわち $y=tx$ $(x\neq0)$ …② が交わるとき

①を満たし $\frac{y}{x}=t$ となる (x, y) が存在するから①と②が交わるときの t の範囲を求めればよい。

図より

$$\boxed{-\frac{3}{4}\le t\le\frac{3}{4}}$$

[別解]

$t=\frac{y}{x}$ より $y=tx$ $(x\neq0)$

$x^2+y^2-2x+\frac{16}{25}=0$ に代入して

$$x^2+t^2x^2-2x+\frac{16}{25}=0$$

$25(t^2+1)x^2-50x+16=0$ $(x\neq0)$

判別式を D として、$x\in\mathbb{R}$ より

$$D/4=25^2-25\cdot16\cdot(t^2+1)\ge0$$
$$25-16(t^2+1)\ge0$$
$$t^2+1\le\frac{25}{16}$$

$t^2\le\frac{9}{16}$　∴ $-\frac{3}{4}\le t\le\frac{3}{4}$

(2) 相加相乗平均より

$$1+t+\frac{3}{1+t}\ge2\sqrt{(1+t)\cdot\frac{3}{1+t}}=\boxed{2\sqrt{3}}$$

等号成立は $1+t=\frac{3}{1+t}$ すなわち $t=\boxed{\sqrt{3}-1}$ のとき

(3) $z=\frac{x^2+xy}{4x^2+2xy+y^2}$

$$=\frac{\frac{y}{x}+1}{(\frac{y}{x})^2+2\frac{y}{x}+4}$$ $(x\neq0)$ ← 分母・分子を x^2 でわる

$$=\boxed{\frac{t+1}{t^2+2t+4}}$$
$$=\frac{1}{\frac{t^2+2t+4}{t+1}}$$
$$=\frac{1}{t+1+\frac{3}{t+1}}\le\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

等号成立は $t=\sqrt{3}-1$ のとき

最大値 $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$ ($t=\boxed{\sqrt{3}-1}$ のとき)

(4) このとき $y=(\sqrt{3}-1)x$ を代入

$$x^2+(\sqrt{3}-1)^2x^2-2x+\frac{16}{25}=0$$
$$(5-2\sqrt{3})x^2-2x+\frac{16}{25}=0$$

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\frac{2}{5-2\sqrt{3}}=\boxed{\frac{2(5+2\sqrt{3})}{13}}$$

[6]

$\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}=k$ とおく

$x^2+4x+1=k(x^2+x+1)$

$(k-1)x^2+(k-4)x+k-1=0$

i) $k=1$ のとき

$-3x=0 \quad \therefore x=0$

よって $x=0$ のとき $k=1$

ii) $k\neq 1$ のとき

判別式を D として

$x\in\mathbb{R}$ より

$D=(k-4)^2-4(k-1)(k-1)$

$=k^2-8k+16-4(k^2-2k+1)$

$=-3k^2+12\geq 0$

$k^2-4\leq 0 \quad \therefore -2\leq k\leq 2$

$(k\neq 1)$

i), ii) より

$-2\leq k\leq 2$ //

[別解]

$f(x)=\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}$ とおく

$=1+\frac{3x}{x^2+x+1}$

$x=0$ のとき $f(x)=1$

$x\neq 0$ 〃

$f(x)=1+\frac{3}{x+\frac{1}{x}+1}$

i) $x>0$ のとき

相加相乗平均より

$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$

等号成立は $x=\frac{1}{x}$ すなわち $x=1$ のとき

ii) $x<0$ のとき

$x+\frac{1}{x}$

$x=-t\ (t>0)$ とおくと

$=-t-\frac{1}{t}$

$=-\left(t+\frac{1}{t}\right)\leq -2$ $\left(t+\frac{1}{t}\geq 2\right.$ より$\left.\right)$

等号成立は $t=1$ すなわち $x=-1$ のとき

i), ii) より $x\neq 0$ のとき

$1<f(x)\leq 2,\ -2\leq f(x)<1$

よって

$-2\leq f(x)\leq 2$ //

<point>

① 実数条件

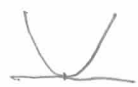
注

$x>0$ のときは相加相乗平均が有効だが x が実数全体のときは $x<0$ のときも考えなければならないので、実数条件が有効。
逆に $x>0$ のとき、実数条件を使うと解の配置となるので相加相乗平均が有効.

[7]

$\frac{1}{3}\underset{①}{\leq}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x+1}\underset{②}{\leq}3$

①



$x^2-x+1\leq 3x^2+3ax+3b$

$2x^2+(3a+1)x+3b-1\geq 0$

等号が成り立つことがあるので ← 最小値が $\frac{1}{3}$ より

$2x^2+(3a+1)x+3b-1=0$ の判別式を D_1 として

$D_1=(3a+1)^2-8(3b-1)$

$=9a^2+6a-24b+9=0 \cdots ①$

②

$x^2+ax+b \leqq 3x^2-3x+3$

$2x^2-(a+3)x+3-b \geqq 0$

同様に

$2x^2-(a+3)x+3-b=0$ の判別式を

D_2として

$D_2=(a+3)^2-8(3-b)$

$\quad =a^2+6a+8b-15=0$ …②

①+3×② より

$12a^2+24a-36=0$

$a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$ $\therefore a=-3, 1$

$a=-3$のとき $b=3$

$a=1$のとき $b=1$

よって

$(a, b)=(-3, 3), (1, 1)$ //