高3 数学β　6. 2次方程式の理論

[1]

i) $a=0$ のとき ← 1次方程式では判別式は使えない

$-x-1=0$　∴ $x=-1$

実数解を1つしかもたないので不適

ii) $a \neq 0$ のとき

異なる2つの実数解をもつとき

判別式を D として

$D=(a-1)^2-4a(a-1)$

$=-3a^2+2a+5>0$

$3a^2-2a-5<0$　　$\begin{matrix}1 & 1 & 3\\ 3 & -5 & -5\end{matrix}$ -2

$(a+1)(3a-5)<0$

$a \neq 0$ より $-1<a<0,\ 0<a<\frac{5}{3}$

i), ii) より

$-1<a<0,\ 0<a<\frac{5}{3}$ //

<point>

① 判別式

注.

2次方程式とも $a \neq 0$ とも書いてないので勝手に $a \neq 0$ としてはならない。

注.

2次方程式が

2つの実数解をもつ ⇔ $D \geqq 0$ ← 重解OK

2つの異なる実数解をもつ ⇔ $D>0$
　　　　　　　　　　　　↑重解NG

[2]

i) $a=0$ のとき

$3x+1=0$　∴ $x=-\frac{1}{3}$

実数解は1個

ii) $a \neq 0$ のとき

判別式を D として

$D=6-4a>0$ すなわち $a<\frac{3}{2}$, $a \neq 0$

のとき実数解は2個

$D=0$ すなわち $a=\frac{3}{2}$ のとき 1個

$D<0$ すなわち $a>\frac{3}{2}$ のとき 0個

i), ii) より

$a<0,\ 0<a<\frac{3}{2}$ のとき 2個

$a=\frac{3}{2}$　〃　1個

$a>\frac{3}{2}$　〃　0個 //

3

$$\begin{cases} x+y=a-4 \\ x^2+y^2=-a^2+4a \end{cases}$$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ より

$-a^2+4a=(a-4)^2-2xy$

$2xy=(a-4)^2+a^2-4a$

$2xy=2a^2-12a+16$

$\therefore xy=a^2-6a+8$

x, y を2解とする2次方程式の1つは

$t^2-(x+y)t+xy=0$

$t^2-(a-4)t+a^2-6a+8=0$

判別式を D とすると

$x, y \in \mathbb{R}$ より

$D=(a-4)^2-4(a^2-6a+8)$

$=-3a^2+16a-16 \geqq 0$

$3a^2-16a+16 \leqq 0$ 　 $\begin{matrix} 1 & \times & -4 \\ 3 & & -4 \end{matrix}$

$(a-4)(3a-4) \leqq 0$

$\therefore \dfrac{4}{3} \leqq a \leqq 4$ //

[別解]

代入法で1文字消去して判別式。
対称式なのでどちらを消去しても
同じ式を得る。

4

$$\begin{cases} a+b=8-c \\ a^2+b^2=32-c^2 \end{cases}$$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ より

$32-c^2=(8-c)^2-2ab$

$2ab=(8-c)^2+c^2-32$

$2ab=2c^2-16c+32$

$\therefore ab=c^2-8c+16$

a, b を2解とする2次方程式の1つは

$t^2-(a+b)t+ab=0$

$t^2-(8-c)t+c^2-8c+16=0$

判別式を D とすると

$a, b \in \mathbb{R}$ より

$D=(8-c)^2-4(c^2-8c+16)$

$=-3c^2+16c \geqq 0$

$c(3c-16) \leqq 0$

$\therefore 0 \leqq c \leqq \dfrac{16}{3}$

c の最大値は $\dfrac{16}{3}$ //

[別解]

コーシー・シュワルツの不等式より

$(ax+by)^2 \leqq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

$x=1, y=1$ として

$(a+b)^2 \leqq 2(a^2+b^2)$

$(8-c)^2 \leqq 2(32-c^2)$

$3c^2-16c \leqq 0$

$c(3c-16) \leqq 0$ 　 $\therefore 0 \leqq c \leqq \dfrac{16}{3}$

等号成立は $a=b$ のとき

最大値 $\dfrac{16}{3}$ $\left(a=b=\dfrac{4}{3}\text{ のとき}\right)$

<point>

① コーシー・シュワルツの不等式

$-|\vec{a}||\vec{b}| \leqq \vec{a}\cdot\vec{b} \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$

$\Leftrightarrow (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leqq |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

等号成立は $\vec{a} \parallel \vec{b}$ のとき

[証明]

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より

$-|\vec{a}||\vec{b}| \leqq \vec{a}\cdot\vec{b} \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$

等号成立は $\theta=0°, 180°$ のときで

このとき $\vec{a} \parallel \vec{b}$ $(\vec{b}=k\vec{a}\ (k \in \mathbb{R}))$ □

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=ax+by$

$|\vec{a}|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{x^2+y^2}$ より

$(ax+by)^2\leqq(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

等号成立は $\vec{a}\parallel\vec{b}$ より

$ay-bx=0$

$\therefore \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$ $\left(\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}\right)$

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ のとき

$(ax+by+cz)^2\leqq(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

等号成立は $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき

$\left(\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}\right)$

これは n $(n\geqq4)$ 次元のときも成り立つ!!

[5]

(1) $x^2-2(a-1)x+(a-2)^2=0$

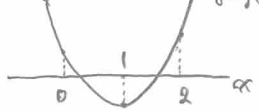
の判別式を D として

$D/4=(a-1)^2-(a-2)^2$

$=2a-3\geqq0$ $\quad\therefore a\geqq\dfrac{3}{2}$ //

(2) $f(x)=x^2-2(a-1)x+(a-2)^2$ とおく.

$0<\alpha<1<\beta<2$ となるためには



$\begin{cases} f(0)>0 \text{ かつ} \\ f(1)<0 \text{ かつ} \\ f(2)>0 \end{cases}$

$f(0)=(a-2)^2>0$

a は2以外の実数

$f(1)=1-2(a-1)+(a-2)^2$

$=a^2-6a+7<0$

$\therefore 3-\sqrt{2}<a<3+\sqrt{2}$

$f(2)=4-4(a-1)+(a-2)^2$

$=a^2-8a+12>0$

$(a-2)(a-6)>0$ $\quad\therefore a<2,\ a>6$

よって

$3-\sqrt{2}<a<2$ //

注.

$0<\alpha<1<\beta<2$

$\underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$ $\begin{cases} 1<\alpha+\beta<3 \\ 0<\alpha\beta<2 \end{cases}$

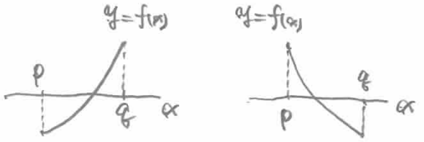
← の反例 $\alpha=0.1,\ \beta=2.8$

<point>

① 解の配置1 (中間値の定理)

$f(x)=x^2+ax+b$ とする

$f(x)=0$ が $p<x<q$ に1つの解をもつとき



$f(p)<0$ かつ $f(q)>0$ $\quad$ $f(p)>0$ かつ $f(q)<0$

両方あり得るときは $f(p)f(q)<0$ とすればよい。

[6]

(1) $mx^2-x-2=0$ $(m\neq0)$ …① ←「2次方程式」と条件にある

$x^2-\dfrac{1}{m}x-\dfrac{2}{m}=0$ ← $m>0$, $m<0$ の場合分けは面倒なので x^2 の係数は1にする

$f(x)=x^2-\dfrac{1}{m}x-\dfrac{2}{m}$ とおく

①の判別式を D とする

2つの解がともに -1 より大きいとき

$\begin{cases} D\geqq0 \text{ (実解条件) かつ} \\ \dfrac{1}{2m}>-1 \text{ (軸の条件) かつ} \\ f(-1)>0 \text{ (境界条件)} \end{cases}$ ← 2つの解 $\Leftrightarrow D\geqq0$, 2つの異なる解 $\Leftrightarrow D>0$

・$D = 1+8m \geqq 0$　∴ $m \geqq -\frac{1}{8}$ …①

・$\frac{1}{2m} > -1$

　両辺×($2m^2$) (>0)

$m > -2m^2$

$2m^2+m > 0$

$m(2m+1) > 0$　∴ $m < -\frac{1}{2},\ m > 0$ …②

・$f(-1) = 1 - \frac{1}{m} > 0$

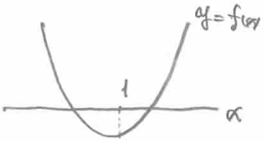
$m^2 - m > 0$

$m(m-1) > 0$　∴ $m<0,\ m>1$ …③

①〜③より

$m > 1$ 〃

(2) 1つの解は1より大きく、他の解は1より小さいとき



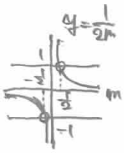
$f(1)<0$

$f(1) = 1 - \frac{3}{m} < 0$

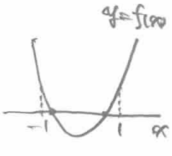
$m^2 - 3m < 0$

$m(m-3) < 0$　∴ $0<m<3$ 〃

(3) 2つの解の絶対値がともに1より小さいとき



$\begin{cases} D \geqq 0 \text{ かつ} \\ -1 < \frac{1}{2m} < 1 \text{ かつ} \\ f(-1)>0,\ f(1)>0 \end{cases}$



$D \geqq 0$ より $m \geqq -\frac{1}{8}$

$-1<\frac{1}{2m}<1$ より $m < -\frac{1}{2},\ m > \frac{1}{2}$

$f(-1)>0$ より $m<0,\ m>1$

$f(1) = 1 - \frac{3}{m} > 0$　$m<0,\ m>3$

よって $m>3$ 〃

<point>

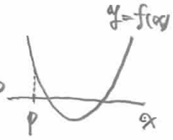
① 解の配置2

$f(x) = x^2+ax+b$ とする

・$f(x)=0$ が $x>p$ に2つの解をもつとき

判別式を D として

$\begin{cases} D \geqq 0 \text{（実解条件）かつ} \\ -\frac{a}{2} > p \text{（軸の条件）かつ} \\ f(p) > 0 \text{（境界条件）} \end{cases}$



とくに $p=0$ のとき（2解とも正）

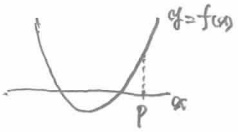
$f(x)=0$ の2解を α, β とすると

$\begin{cases} D \geqq 0 \text{ かつ} \\ \alpha+\beta > 0 \text{ かつ} \\ \alpha\beta > 0 \end{cases}$

を用いてもよい。$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ は解と係数の関係より求める。

・$f(x)=0$ が $x<p$ に2つの解をもつとき

$\begin{cases} D \geqq 0 \\ -\frac{a}{2} < p \\ f(p) > 0 \end{cases}$



とくに $p=0$ のとき（2解とも負）

$\begin{cases} D \geqq 0 \\ \alpha+\beta < 0 \\ \alpha\beta > 0 \end{cases}$

② 解の配置3

$f(x) = x^2+ax+b$ とする

$f(x)=0$ が $x<p$, $x>p$ に1つずつ解をもつとき

$f(p)<0$

とくに $p=0$ のとき（1解が正、1解が負）

2解を α, β とすると

$\alpha\beta < 0$

（$\alpha+\beta$ は符号不明

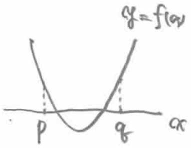
$D = a^2-4b = a^2-4\underset{<0}{\alpha\beta} \geqq 0$ より $D \geqq 0$ は不要

③ 解の配置4

$f(x)=x^2+ax+b$ とする

$f(x)=0$ が $p<x<q$ に2つの解をもつとき 判別式を D として

$$\begin{cases} D \geqq 0 \\ p< -\dfrac{a}{2} < q \\ f(p)>0,\ f(q)>0 \end{cases}$$



[別解] 定数分離

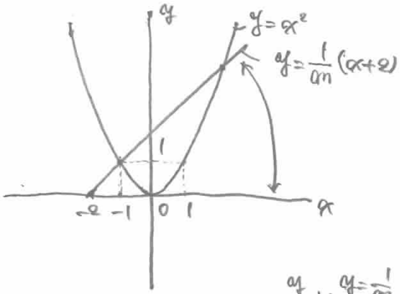
(1) $mx^2-x-2=0\ (m\neq 0)\ \cdots①$

$mx^2=x+2$

$x^2=\dfrac{1}{m}(x+2)$

①の解は $y=x^2$ と $y=\dfrac{1}{m}(x+2)$ の交点の x 座標に等しい。

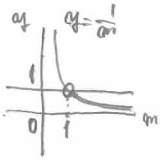
条件を満たすとき



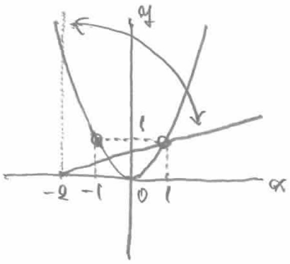
図より

$0<\dfrac{1}{m}<1$

$\therefore m>1$



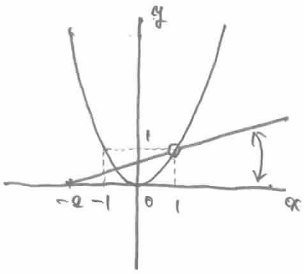
(2) 条件を満たすとき



図より

$\dfrac{1}{m}>\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore 0<m<3$

(3) 条件を満たすとき



図より

$0<\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore m>3$

[7]

(1) (i) $x=0,\ 2$ を解にもつとき

(ア) $x=0$ を解にもつとき

$a+2=0$ $\quad\therefore a=-2$

このとき

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$ $\quad\therefore x=0,\ 3$

条件を満たす。

(イ) $x=2$ を解にもつとき

$4+2(a-1)+a+2=0$

$3a+4=0$ $\quad\therefore a=-\dfrac{4}{3}$

このとき

$x^2-\dfrac{7}{3}x+\dfrac{2}{3}=0$

$3x^2-7x+2=0$ $\quad \begin{matrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{matrix}$

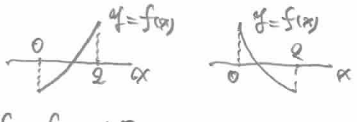
$(x-2)(3x-1)=0$ $\quad\therefore x=2,\ \dfrac{1}{3}$

条件を満たさない。

(ii) $x=0,\ 2$ を解にもたないとき

$f(x)=x^2+(a-1)x+a+2$ とおく

(ア) $0<x<2$ に1つの解をもつ



$f(0)f(2)<0$

$(a+2)(3a+4)<0$

$\therefore -2<a<-\dfrac{4}{3}$

(ii) $0<x<2$ に重解をもつ

$f(x)=0$ の判別式を D とおく

$$\begin{cases} D=0 \text{ かつ} \\ 0<-\dfrac{a-1}{2}<2 \text{ かつ} \\ f(0)>0,\ f(2)>0 \end{cases}$$

$D=0$ より

$D=(a-1)^2-4(a+2)$

$=a^2-6a-7=0$

$(a+1)(a-7)=0 \quad \therefore a=-1, 7$

$0<-\dfrac{a-1}{2}<2$ より

$-3<a<1$

$f(0)>0$ より

$f(0)=a+2>0 \quad \therefore a>-2$

$f(2)>0$ より

$f(2)=3a+4>0 \quad \therefore a>-\dfrac{4}{3}$

よって $a=-1$

(i), (ii) より $-2 \leqq a < -\dfrac{4}{3},\ a=1$〃

(2) $x^2+(a-1)x+a+2=0$

$(x+1)a+x^2-x+2=0$ ← aの方程式とみて

$g(a)=(x+1)a+x^2-x+2$ とおく ← 直線

$g(a)=0$ が $-2 \leqq a \leqq -1$ に解をもつ

ためには

$g(-2)g(-1) \leqq 0$

$(x^2-3x)(x^2-2x+1) \leqq 0$

$x(x-3)(x-1)^2 \leqq 0$

$\therefore 0 \leqq x \leqq 3$〃

<point>

① 解の配置5.

$p \leqq x \leqq q$ に「ただ1つ」

「少なくとも1つ」

解をもつのパターン

(i) $x=p,\ x=q$ を解にもつ

$x=p,\ x=q$ を代入して、条件を満たすか調べる

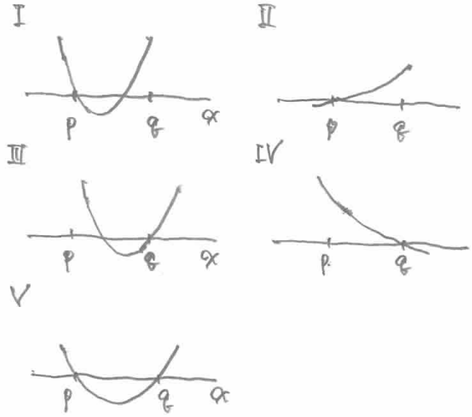
(ii) $x=p,\ x=q$ を解にもたない

で場合分け

(ii)は 解の配置1, 4 を使えば容易.

(i)が話をややこしくしている

(i)は



など様々なパターンがある

$p<x<q$ にただ1つ → I, III は OK

$p \leqq x \leqq q$ 〃 → II, IV は OK

$p<x<q$ に少なくとも1つ → I, III は OK

$p \leqq x \leqq q$ 〃 → I, III, V は OK.

例えば 本問は $p \leqq x \leqq q$ にただ1つで あるが

II より $f(p)=0,\ f(q)>0$

IV より $f(p)>0,\ f(q)=0$ と安易にやっては いけない.

$f(p)=0,\ f(q)>0$ は I, $f(p)>0,\ f(q)=0$ は III を含んでしまうからである.

したがって解答のように
$x=p$, $x=q$ を代入して条件を満たしているかを調べるのがいちばん楽である。

［別解］定数分離

(1) $x^2+(a-1)x+a+2=0$ …①

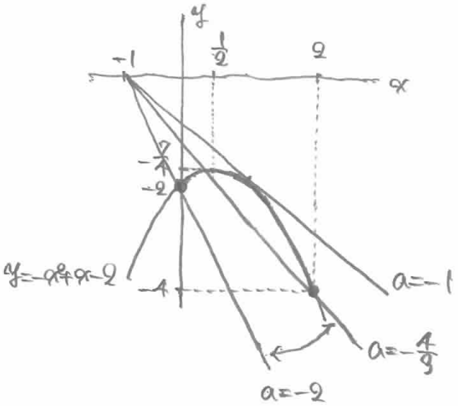
$-x^2+x-2=a(x+1)$

①の実数解は

$y=-x^2+x-2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$ と

$y=a(x+1)$ の交点の x 座標に等しい。

①が $0\leqq x\leqq 2$ にただ1つの解をもつとき



$y=-x^2+x-2$ と $y=a(x+1)$ が接するのは①が重解をもつときで判別式を D とすると

$D=(a-1)^2-4(a+2)$

$=a^2-6a-7=0$

$(a+1)(a-7)=0$ ∴ $a=-1, 7$

図より

$-2\leqq a<-\frac{4}{3}$, $a=-1$ //

(2) $a=-2$ のとき

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$ ∴ $x=0, 3$

左図で a を $-2\leqq a\leqq -1$ で動かすと x は $0\leqq x\leqq 3$ を動く //

本問はこちらで解いた方がよい。
定数分離でうまく解けるときは定数分離の方がはるかに楽である。