

高3 数学β 7. 種々の方程式の問題

①

$$2\alpha^2 - (6k+3i)\alpha - \frac{4}{9}\alpha - 9 + 2i = 0$$

$$2\alpha^2 - 6k\alpha - \frac{4}{9}\alpha - 9 + (-9\alpha^2 + 2)i = 0$$

$$2\alpha^2 - 6k\alpha - \frac{4}{9}\alpha - 9, -9\alpha^2 + 2 \in \mathbb{R} \text{ より}$$

$$\begin{cases} 2\alpha^2 - 6k\alpha - \frac{4}{9}\alpha - 9 = 0 \text{ かつ } \dots ① \\ -9\alpha^2 + 2 = 0 \dots ② \end{cases}$$

② より

$$-9\alpha^2 + 2 = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{2}{9} \quad \therefore \alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{9}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{6}}{9} \text{ のとき } -4k - 9 = 0 \quad \therefore k = -\frac{9}{4}$$

$$\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{9} \text{ のとき } -4k - 9 = 0 \quad \therefore k = -\frac{9}{4}$$

よって $k = -\frac{9}{4}$ のとき 2つの異なる実数解 $\alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{9}$ をもつ

<point>

① 複素数係数の方程式

②

① 解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b \\ \alpha\beta\gamma = -c \end{cases}$$

よって

$$a = -(\alpha + \beta + \gamma), b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha,$$

$$c = -\alpha\beta\gamma //$$

② α, β, γ すべて整数と仮定すると

a を奇数とすれば

α, β, γ は 3 つとも奇数か、

1 つか奇数で 2 つか偶数である

このときそれぞれ

b, c はともに奇数か、 b, c はともに偶数となるので矛盾

a を偶数とすれば

α, β, γ は 3 つとも偶数か、

1 つか偶数で 2 つか奇数である

このとき、それぞれ

b, c はともに偶数か、 b は奇数、 c は偶数となるので矛盾

よって題意は示された

<point>

① 3 次方程式の解と係数の関係

注

背理法とは

命題を否定して矛盾を導くことにより、もとの命題が真であることを示す証明法です

本問は $p \rightarrow q$ という命題です

$p \rightarrow q$ の否定は

p であって q でないものが存在するです

p である集合を P , q である集合を Q とすると $p \rightarrow q$ は $P \subset Q$ なので、その否定は $P \not\subset Q$ が存在するということ



否定



$P \not\subset Q$
(ふたつともある)

本問では

p : a, b, c のうち 2 つか奇数で 1 つか偶数

q : α, β, γ のうち少なくとも 1 つは整数

p を前提として q であるものが存在するとして

p に矛盾するとして背理法を使っている

3

$$\begin{aligned} \text{① } a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= 2^2 - 2 \cdot 3 = -2, \end{aligned}$$

$$a^2+b^2+c^2-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

より

$$a^2+b^2+c^2 = 2(-2-3)+3 \cdot 2 = -4,$$

② $x=a, b, c$ を解にもち x^3 の係数から
1 の 3 次方程式は

$$(x-a)(x-b)(x-c) = 0$$

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = 0$$

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x^2 + Ax + B = x^2 - 2x^2 + 3x - 2 \text{ より}$$

1 次係数 A から $A = -2$ となり $B = -2$ となる

$$A = -2, B = 3, C = -2,$$

$$\text{③ } x^5 = (x^2 - 2x^2 + 3x - 2)(x^3 + 2x + 1) - 2x^2 + 2$$

$x=a$ を代入すると $a^5 - 2a^2 + 2a - 2 = 0$
より

$$a^5 = -2a^2 + 2a + 2$$

同様に

$$b^5 = -2b^2 + b + 2$$

$$c^5 = -2c^2 + c + 2$$

よって

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 + c^5 &= -2(a^2 + b^2 + c^2) + (a + b + c) + 6 \\ &= -2(-2) + 2 + 6 = 12, \end{aligned}$$

<point>

① $x=a, b, c$ を 3 解とする 3 次方程式

② 次数下げ

4

$$x^2y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \text{ より}$$

$$6 = 2^2 - 2(xy+yz+zx)$$

$$\therefore xy+yz+zx = -1$$

$$x^2+y^2+z^2-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) - yz-zx \text{ より}$$

$$8-3xyz = 2(6+1)$$

$$\therefore xyz = -2$$

x, y, z を解とする 3 次方程式の 1 つは

$$t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz = 0$$

$$\boxed{t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0}$$

$$t^2(t-2) - (t-2) = 0$$

$$(t^2-1)(t-2) = 0$$

$$(t+1)(t-1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = \pm 1, 2$$

$$x \leq y \leq z \text{ より}$$

$$x = -1, y = 1, z = 2,$$

<point>

① 対称式の 3 元 3 次連立方程式

5

$$\begin{aligned} \text{① } \alpha^9 &= \sqrt{\frac{28}{27}} + 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{28}{27}} + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{28}{27}} - 1 \\ &\quad - (\sqrt{\frac{28}{27}} - 1) \end{aligned}$$

$$= 2 - \alpha$$

$$\therefore \alpha^9 + \alpha - 2 = 0$$

よって α は $x^9 + x - 2 = 0$ の解である

$$\text{② } x^9 + x - 2 = 0$$

$$(x-1)(x^9+x+2) = 0$$

$x^9+x+2=0$ の判別式を D とすると

$$D = 1 - 4 \cdot 2 = -7 < 0, \alpha \in \mathbb{R} \text{ より}$$

$$\alpha = 1 \quad \square$$