

高3数学B 9. 式の値・二項定理 ② 多項定理

[1]

$$\begin{aligned} (x+1)^8(x-1)^4 &= (x+1)^4(x^2-1)^4 \\ &= (1+x)(1+x)^3(x^2-1)^4 \end{aligned}$$

の展開式の一般項は

$$\begin{aligned} &+C_k x^k + C_l (-1)^{4-l} x^{2l} \\ &= (-1)^{4-l} + C_k + C_l x^{k+2l} \\ &(k, l = 0, 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

x^{10} の項となるのは

$$k+2l=10$$

$$\therefore (k, l) = (2, 4), (4, 3)$$

よって x^{10} の係数は

$$+C_2 \cdot 4C_4 + 4C_4 \cdot 1C_3 = 6 + 4 = 10$$

[別解]

$$\begin{aligned} (x+1)^4(x^2-1)^4 &= (x^2+x^2-x-1)^4 \\ &\text{として多項定理} \end{aligned}$$

$(x^2+x^2-x-1)^6$ の展開式の一般項は

$$\frac{6!}{p!q!r!} (x^2)^p (x^2)^q (-1)^r = \frac{6!}{p!q!r!} x^{2p+2q}$$

$$p, q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq p, q, r \leq 6, p+q+r=6$$

x^{10} の項となるのは

$$2p+2q=10$$

$$(p, q, r) = (4, 2, 0), (5, 0, 1)$$

よって x^{10} の係数は

$$\frac{6!}{4!2!0!} + \frac{6!}{5!0!1!} = 15 + 6 = 21$$

<point>

① 二項定理

$(a+b)^n$ の一般項は

$$nC_k a^{n-k} b^k \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n nC_k a^{n-k} b^k$$

$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は

$$\frac{n!}{p!q!r!} a^p b^q c^r$$

$$p, q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq p, q, r \leq n, p+q+r=n$$

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq n \\ p+q+r=n}} \frac{n!}{p!q!r!} a^p b^q c^r$$

[2]

$$(100, 1)^7 = (10^2 + \frac{1}{10})^7$$

$$\begin{aligned} &= {}^7C_0 \cdot 10^{14} + {}^7C_1 \cdot 10^{12} + {}^7C_2 \cdot 10^{10} + \dots + {}^7C_6 \cdot 10^2 \\ &\quad + {}^7C_7 \cdot \frac{1}{10} + {}^7C_6 \cdot \frac{1}{10^2} + {}^7C_5 \cdot \frac{1}{10^3} \end{aligned}$$

$${}^7C_7 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 21 < 1000 \text{ より } {}^7C_7 \cdot \frac{1}{10}$$

は百の位に影響しない

同様に ${}^7C_6 \cdot \frac{1}{10^2}, {}^7C_6 \cdot \frac{1}{10^3}$ も百の位に影響しないから

百の位は 7C_7 の一の位の数である

$${}^7C_7 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 21 \text{ より } 1$$

${}^7C_7 = 1$ より ${}^7C_7 \cdot \frac{1}{10^2}$ は小数第4位に影響しないから

小数第4位は 7C_6 の一の位の数より

$7C_6$

[3]

$$1) (1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + \dots + {}^nC_n x^n$$

$x=1$ を代入して

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + \dots + {}^nC_n = 2^n$$

$$\therefore {}^nC_1 + \dots + {}^nC_n = 2^n - 1$$

よって

$$2^n - 1 = 127$$

$$2^n = 128 \quad \therefore n = 7$$

$$(2) 91^{17} = (90+1)^{17}$$

$$= {}_{17}C_0 \cdot 90^{17} + {}_{17}C_1 \cdot 90^{16} + \dots + {}_{17}C_{16} \cdot 90^1 + {}_{17}C_{17} \cdot 90^0$$

$$= 900N + 17 \cdot 90 + 1 \quad (N \in \mathbb{N})$$

$$= 900N + 511$$

よって余りは 511。

<point>

$$(1) {}_nC_0 + {}_nC_1 + \dots + {}_nC_n = 2^n$$

[4]

$$(1) {}_pC_r = \frac{p!}{r!}$$

$$= \frac{p}{r} \cdot \frac{(p-1)!}{(r-1)!}$$

$$= \frac{p}{r} {}_{p-1}C_{r-1}$$

$$\therefore r {}_pC_r = {}_{p-1}C_{r-1} \quad \square$$

$p-1, r-1 \in \mathbb{Z}$ より ${}_{p-1}C_{r-1}$ は p の倍数

r と p は互いに素より

${}_pC_r$ は p の倍数 $\square$

$$(2) 2^p = (1+1)^p$$

$$= {}_pC_0 + {}_pC_1 + \dots + {}_pC_{p-1} + {}_pC_p$$

${}_pC_r$ ($r=1, 2, \dots, p-1$) は p の倍数

より

$$= Np + 2 \quad (N \in \mathbb{N})$$

$$p=2 \text{ のとき 余りは } 0$$

$$p \geq 3 \text{ のとき 余りは } 2$$

注

4) の公式は整数問題でよく使うので覚えておいた方がよい。

[5]

4) A_p のすべての要素は

$${}_pC_1, {}_pC_2, {}_pC_3, \dots, {}_pC_p$$

$${}_pC_0 + {}_pC_1 + \dots + {}_pC_p = 2^p$$

$${}_nC_k = {}_nC_{n-k} \text{ より}$$

$$2({}_pC_0 + {}_pC_1 + \dots + {}_pC_p) = 2^{p+1}$$

$${}_pC_1 + {}_pC_2 + {}_pC_3 + {}_pC_4 = 2^{p+1} - 1 = 255$$

(2) ${}_nC_k < {}_nC_{k+1}$ となるとき

$$\frac{{}_nC_{k+1}}{{}_nC_k} > 1 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{分子の } n-k \text{ が大きいので} \\ \text{商が } 1 \text{ より大きくなる} \end{array}$$

$$\frac{{}_nC_{k+1}}{{}_nC_k} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{n-k}{k+1} > 1$$

$$n-k > k+1 \quad \therefore k < \frac{n-1}{2}$$

よって

$${}_nC_1 < {}_nC_2 < \dots < {}_nC_{\frac{n-1}{2}}$$

となり問題意を示す。これは $\square$

$$(3) {}_nC_0 + \dots + {}_nC_n = 2^n$$

$$2({}_nC_0 + \dots + {}_nC_{\frac{n-1}{2}}) = 2^n$$

$$\therefore {}_nC_1 + \dots + {}_nC_{\frac{n-1}{2}} = 2^{n-1} - 1 \quad (\text{奇数})$$

m の偶数と仮定

${}_nC_1 + \dots + {}_nC_{\frac{n-1}{2}}$ は偶数とより矛盾

よって m は奇数である $\square$