

高3数学B 10. 等式・不等式の証明

[1]

$$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{5} = k \text{ とおく } (k \neq 0)$$

$$\begin{cases} x+y = 3k \dots ① \\ y+z = 4k \dots ② \\ z+x = 5k \dots ③ \end{cases}$$

①+②+③ より

$$2(x+y+z) = 12k$$

$$x+y+z = 6k \dots ④$$

①~④ より

$$x = 2k, y = k, z = 3k.$$

∴

$$x:y:z = \boxed{2:1:3}$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y+z} = \frac{2k^2+k^2+9k^2}{4k^2+k^2+9k^2} = \boxed{\frac{11}{14}}$$

<point>

① 比例式は比の値 = k とおく.

[2]

$$\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} = k \text{ とおく}$$

$$\begin{cases} b+c = ka \dots ① \\ c+a = kb \dots ② \\ a+b = kc \dots ③ \end{cases}$$

①+②+③ より

$$2(a+b+c) = k(a+b+c)$$

$$(k-2)(a+b+c) = 0$$

$$\therefore k=2 \text{ 或 } a+b+c=0$$

i) $k=2$ のとき

$$\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc} = \frac{2a \cdot 2b \cdot 2c}{abc} = 8$$

ii) $a+b+c=0$ のとき

$$\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc} = \frac{(-a)(-b)(-c)}{abc} = -1$$

[3]

$$\begin{aligned} \text{d) } a^2+b^2+c^2 - (ab+bc+ca) \\ = \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

等号成立は

$$a-b=0 \text{ かつ } b-c=0 \text{ かつ } c-a=0$$

すなわち $a=b=c$ のとき

$$\text{e) } a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \quad (\text{d) より})$$

$$\stackrel{\text{①}}{=} (a^2b)^2 + (b^2c)^2 + (ca)^2$$

$$\geq (ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab)$$

$$\stackrel{\text{②}}{=} abc(a+b+c) \quad (\text{d) より})$$

等号成立は

$$\stackrel{\text{①}}{a^2=b^2=c^2} \text{ かつ } \stackrel{\text{②}}{ab=bc=ca}$$

$$ab=bc \text{ より } b=0 \text{ 或 } a=c \quad \leftarrow b \neq 0 \text{ のとき } (a=b=c)$$

$$\cdot b=0 \text{ のとき } \text{① より } a=b=c=0$$

∴ ①は②も満たす

$$\cdot a=c \text{ のとき } \text{② より } ab=a^2$$

$$\therefore a=0 \text{ 或 } a=b$$

$$a=0 \text{ のとき } \text{① より } a=b=c=0$$

$$a=b \text{ のとき } a=b=c$$

以上より等号成立は $a=b=c$ のとき

[4]

$$\text{d) } 1+ab - (a+b)$$

$$= a(b-1) - (b-1)$$

$$= (a-1)(b-1)$$

$$|a|, |b| < 1 \text{ であるから } a-1, b-1 < 0 \text{ より} \\ > 0$$

$$\therefore a+b < 1+ab$$

$$2) a+b+c+d < 1+ab+1+cd \quad (1) \text{より}$$

$$= 2+ab+cd$$

$$|ab|, |cd| < 1 \text{ より}$$

$$< 2+1+(ab)(cd)$$

$$= 3+abcd \quad \square$$

[b]

$$1) \frac{1}{2}(x_1+x_2) \geq \sqrt{x_1x_2}$$

左辺、右辺 > 0 より $\uparrow$ 同値

$$(x_1+x_2)^2 \geq 4x_1x_2 \text{ を示せばよい.}$$

$$(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = (x_1-x_2)^2 \geq 0$$

$$\therefore (x_1+x_2)^2 \geq 4x_1x_2 \quad \uparrow$$

(等号成立は $x_1=x_2$ のとき $\square$.)

$$2) \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(x_1+x_2) + \frac{1}{2}(x_3+x_4) \right\}$$

$$\stackrel{1)}{\geq} \frac{1}{2} (\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_3x_4}) \quad (1) \text{より}$$

$$\stackrel{2)}{\geq} \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}}$$

$$= \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \quad (1) \text{より}$$

等号成立は

$$1) \quad x_1=x_2 \text{ かつ } x_3=x_4 \text{ かつ } 2) \quad x_1x_2=x_3x_4$$

$$1), 2) \text{ より}$$

$$x_1^2 = x_3^2$$

$$x_1, x_3 > 0 \text{ より } x_1 = x_3$$

よって $x_1=x_2=x_3=x_4$ のとき $\square$.

$$3) \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+\sqrt[3]{x_1x_2x_3})$$

$$\geq \sqrt[4]{x_1x_2x_3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}}$$

$$\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3) \geq \sqrt[4]{(x_1x_2x_3)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

$$\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3) \geq \frac{3}{4}\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

$$\therefore \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

等号成立は

$$x_1=x_2=x_3=\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

すなわち $x_1=x_2=x_3$ のとき $\square$.

<point>

① 相加相乗平均の不等式

注

「等号成立条件」は指示がなければ書かなくてよい(式変形中に示している)が意識はしておいた方がよい。(最小値の問題では等号成立条件が重要)

[6]

$$(a+\frac{1}{b})(b+\frac{4}{a})$$

$$= ab + \frac{4}{ab} + 5$$

$ab > 0$ であるから 相加相乗平均より

$$\geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} + 5 = 9$$

等号成立は

$$ab = \frac{4}{ab} \quad \therefore ab = 2 \quad (ab > 0) \text{ のとき}$$

よって最小値は $\boxed{9}$ (最小値の存在を示す必要はない)

注

a, b > 0 であるから 相加相乗平均より

$$a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \quad \dots ①$$

$$b + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{\frac{4b}{a}} \quad \dots ②$$

①, ② の両方を加えて

$$(a+\frac{1}{b})(b+\frac{4}{a}) \geq 8$$

よって最小値は 8 としては誤り

①の等号成立条件は $ah=1$

② $ah=4$

ここで同時に $2\sqrt{\frac{a}{h}}, 2\sqrt{\frac{4h}{a}}$ の値は
とれない。

このように相加相乗平均を用いて
最大、最小の問題を考えると
等号成立条件が重要。

[7]

$$(x + \frac{1}{x})(2x + \frac{1}{2x})$$

$$= 2x^2 + \frac{1}{2x^2} + 4$$

$x^2 > 0$ であるから相加相乗平均より

$$\geq 2\sqrt{2x^2 \cdot \frac{1}{2x^2}} + 4 = 6$$

等号成立は

$$2x^2 = \frac{1}{2x^2}$$

$$x^4 = \frac{1}{4} \quad \therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき } (x > 0)$$

[8]

$$2b + \frac{2}{a+1} + \frac{2a+2}{b+2}$$

$$= 2(b+2) + \frac{2}{a+1} + \frac{2(a+1)}{b+2} - 4$$

$$\frac{2}{a+1} \cdot \frac{2(a+1)}{b+2} > 0 \text{ であるから}$$

相加相乗平均より

$$\geq 2\sqrt{2(b+2) \cdot \frac{2}{a+1} \cdot \frac{2(a+1)}{b+2}} - 4$$

$$= 2$$

等号成立は

$$b+2 = \frac{1}{a+1} = \frac{a+1}{b+2}$$

$$\begin{cases} b+2 = \frac{1}{a+1} \dots \textcircled{1} \\ \frac{1}{a+1} = \frac{a+1}{b+2} \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①、②より

$$(a+1)^2 = 1$$

$$a^2 + 3a + 3a = 0$$

$$a(a^2 + 3a + 3) = 0$$

$a \in \mathbb{R}$ より $a = 0$ 、

このとき $b = -1$

よって最小値 2、

[9]

① $ah = k^3 \dots \textcircled{1} \quad (a, h, k > 0)$

対辺の長さの2乗は

$$a^2 + h^2 + k^2$$

$$\textcircled{1} \text{ から } h = \frac{k^3}{a} \text{ より}$$

$$= a^2 + \frac{k^6}{h^2 a^2} + k^2$$

$a^2 \cdot \frac{k^6}{h^2 a^2} > 0$ であるから相加相乗平均より

$$\geq \frac{2k^3}{h} + k^2$$

等号成立は

$$a^2 = \frac{k^6}{h^2 a^2}$$

$$(h = \sqrt{\frac{k^3}{a}})$$

$$a^2 = \frac{k^6}{h^2}$$

$$\therefore a = \sqrt{\frac{k^3}{h}} \text{ のとき}$$

$$\therefore \text{最小値 } \frac{2k^3}{h} + k^2$$

② $a^2 \cdot \frac{k^6}{h^2 a^2} \cdot h^2 > 0$ であるから相加相乗平均

より

$$a^2 + \frac{k^6}{h^2 a^2} + h^2 \geq 3\sqrt{a^2 \cdot \frac{k^6}{h^2 a^2} \cdot h^2} = 3k^2$$

等号成立は

$$a^2 = \frac{k^6}{h^2 a^2} = h^2$$

$$a^2 = h^2 \text{ より } a = h \quad (a, h > 0)$$

$$a^2 = \frac{k^6}{a^2} \quad a^2 = k^3 \quad \therefore a = k \quad (a, k > 0)$$

このとき $h = k$ より $a = h = k$

よって題意は示された。

10

$$d) \sqrt{a^2+b^2+c^2} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq |ax+by+cz|$$

左辺, 右辺 ≥ 0 より

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$$

を示せばよい. ... ①

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - (ax+by+cz)^2$$

$$= a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2$$

$$- 2abxy - 2bcyz - 2cax$$

$$= (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (az-cx)^2 \geq 0$$

$$\therefore (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$$

等号成立は

$$ay-bx=0 \text{ かつ } bz-cy=0 \text{ かつ } az-cx=0$$

$$ay=bx \text{ かつ } bz=cy \text{ かつ } az=cx \text{ かつ}$$

$abc \neq 0$ のときは

$$\frac{a}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ と表せる}$$

e) ①の不等式において

$$a \in \sqrt{2}a, b \in \sqrt{3}b, c \in \sqrt{5}c,$$

$$x=\sqrt{2}, y=\sqrt{3}, z=\sqrt{5} \text{ とおくと}$$

$$10(2a^2+3b^2+5c^2) \geq (2a+3b+5c)^2 \quad \square$$

<point>

① I-シー-シュワルツの不等式.

注.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta, \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{ より}$$

$$-|\vec{a}| |\vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\therefore |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ とすれば d) の}$$

不等式が得られる

等号成立は $\cos \theta = \pm 1$ のときすなわち

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ のときである.

この形で覚えておいた方がよい.

本問もこれで証明してもよい

11

シュワルツの不等式より

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$$

$x=1, y=1, z=1$ とすると

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$$

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq 4$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2 \geq \frac{4}{3}$$

等号成立は $a=b=c=\frac{2}{3}$ のとき

よって最小値は $\boxed{\frac{4}{3}}$

[別解]

$$a+b+c=2 \text{ より}$$

$$a^2+b^2+c^2 = a^2+b^2+(2-(a+b))^2$$

$$= a^2+b^2+4-4(a+b)+(a+b)^2$$

$$= 2a^2+2ab-4a+2b^2-4b+4$$

$$= 2a^2+2a(b-2)+2b^2-4b+4$$

$$= 2\left(a+\frac{b-2}{2}\right)^2 - \frac{(b-2)^2}{2} + 2b^2-4b+4$$

$$= 2\left(a+\frac{b-2}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}b^2-2b+2$$

$$= 2\left(a+\frac{b-2}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(b-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$$

$$b=\frac{2}{3}, a=\frac{2}{3}, c=\frac{2}{3} \text{ のときに最小値 } \boxed{\frac{4}{3}}$$

12

シュワルツの不等式より

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$$

$x=y=z=1$ とすると

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$$

$$3 \geq (a+b+c)^2$$

$$\therefore -\sqrt{3} \leq a+b+c \leq \sqrt{3}$$

等号成立は $a=b=c=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

よって最大値は $\sqrt{3}$

[13]

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

左辺、右辺 ≥ 0 より $|a|^2 = a^2$

$$(x+y)^2 \leq (|x|+|y|)^2 \text{ を示せばよい}$$

$$(|x|+|y|)^2 = (x+y)^2$$

$$= x^2 + 2|x||y| + y^2 = (x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= 2(|xy| - xy) \geq 0 \leftarrow |x||y| = |xy|$$

等号成立は $xy \geq 0$ のとき

$$\langle \text{point} \rangle \quad \therefore (x+y)^2 \leq (|x|+|y|)^2$$

① 三角不等式

[14]

$$d) \frac{q}{1+q} - \frac{p}{1+p}$$

$$= \frac{q(1+p) - p(1+q)}{(1+p)(1+q)}$$

$$= \frac{q-p}{(1+p)(1+q)} \geq 0 \quad (0 \leq p \leq q)$$

$$\therefore \frac{p}{1+p} \leq \frac{q}{1+q}$$

(等号成立は $p=q$ のとき)

$$e) |p+q| \leq |p|+|q| \text{ より}$$

$$\frac{|p+q|}{1+|p+q|} \leq \frac{|p|+|q|}{1+|p|+|q|} \quad (\text{より})$$

$$= \frac{|p|}{1+|p|+|q|} + \frac{|q|}{1+|p|+|q|}$$

$$\leq \frac{|p|}{1+|p|} + \frac{|q|}{1+|q|}$$

等号成立は

$$pq \geq 0 \text{ かつ } p=0 \text{ または } q=0$$

すなわち $p=0$ または $q=0$ のとき

$$\frac{|p|}{1+|p|+|q|} \leq \frac{|p|}{1+|p|} \text{ の等号成立は } p=0 \text{ または } q=0$$

$$\frac{|q|}{1+|p|+|q|} \leq \frac{|q|}{1+|q|} \text{ の等号成立は } p=0 \text{ または } q=0$$