

高2 数学B 11. 集合と論理

II

(A) $|x| < 1 \iff x^2 < 1$
 $\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $-1 < x < 1 \quad -1 < x < 1$

(B) m が 4 の倍数 $\iff m$ は 2 の倍数

$\rightarrow$
 $m = 4k \ (k \in \mathbb{Z})$
 $= 2 \cdot (2k)$ より 真

$\leftarrow$
 偽 反例 $m = 2$

(C) $x > y \iff x^2 > y^2$

$\rightarrow$
 偽 反例 $x = -1, y = -2$

$\leftarrow$
 偽 反例 $x = -2, y = 1$

(D) m が 6 の倍数 $\iff m$ または n は 6 の倍数

$\rightarrow$
 偽 $m = 2, n = 3$

(E) (A), (B)

(F) (B), (C)

<point>

① 命題の真偽

② $p \rightarrow q$ の形の命題、逆命題
 $\nwarrow$ 逆命題

注

元の命題と逆命題の真偽は一致するとは限らない。

②

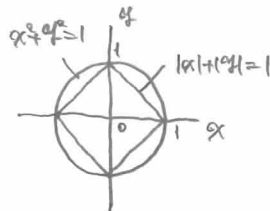
(1) $p \iff q$

$\leftarrow$

偽 反例 $h^2 - 4ac = 0$ となるもの
 例え $a = 1, c = 1, h = 2$

+ 分条件

(2) $p \iff q$



p を満たす (x, y) の集合を P

Q とする

$P \subset Q$ より $p \rightarrow q$ は偽

$Q \subset P$ $q \rightarrow p$ 真

必要条件

注

$p \rightarrow q$ p -真のとき $p \subset Q$

偽 $p \not\subset Q$

(3) $p \iff q$

↑ 高校では $\subseteq$ という記号を
 使うが一般にはあまり使わない。
 いずれでもない。今後は $\subseteq$ として用いる。

(4) $p \iff q$

$\rightarrow$ 明らか

$\leftarrow$ 対偶法

必要+分条件

(5) $p \iff q$

$\rightarrow$

偽 反例 $a = 1, h = -1$

$\leftarrow$

偽 反例 $a = 1, h = 1$ (符号になる)

いずれでもない

<point>

① 必要条件・十分条件

注

必要条件・十分条件を考えるときは
 p, q どちらか主語である p が重要

注

②のように領域を考えて集合の
 包含関係で考えた方がよいことも
 ある

注

p を満たすものの集合を P

q " Q とする

$P \subset Q$ のとき  ($P=Q$ の場合)

$p \rightarrow q$ は真なので p は q であった
 の十分条件

$Q \subset P$ のとき



$q \rightarrow p$ は真なので p は q であった
 の必要条件

$P=Q$ のとき ($P \subset Q$ かつ $Q \subset P$)



p は q であった
 の必要十分条件

集合の包含関係で理解しておくとよい

②

$$a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a-b \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq b \quad \square$$

<point>

① 同値 = 必要十分条件

注

どちらからスタートしても

$\rightarrow$ も $\leftarrow$ もすべて真

④

d) 偽

反例 $m=2, n=1$

e) 真

$m+n$ が奇数であるとする

m, n のうち一方が偶数で他方が奇数
 である

偶数である方を $2k$ ($k \in \mathbb{N}$), 奇数である
 方を $2l-1$ ($l \in \mathbb{N}$) とすると

$$\begin{aligned} m+n &= (2k)^2 + (2l-1)^2 \\ &= 2(2k^2 + 2l^2 - 2l) + 1 \end{aligned}$$

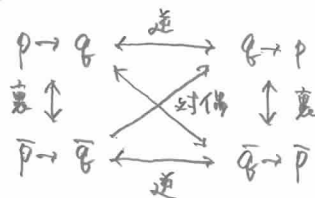
よって $m+n$ は奇数

対偶が真なので与命題も真である $\square$

<point>

① 対偶法

注



もとの命題と対偶命題の真偽は一致
 する

注

仮定を使って結論を証明するので

仮定の命題から結論の命題よりシンプル
 な方がよい

本問もそのままでも証明できるが対偶法
 で示した方がすっきりする

[5]

(A) $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$ (p, q は互いに素である自然数)

と仮定する

$$\sqrt{2}p = q$$

$$2p^2 = q^2$$

q^2 は 2 の倍数となるから

q は 2 の倍数 ← 逆に示す

$$q = 2k \ (k \in \mathbb{N}) \text{ とおくと}$$

$$2p^2 = 4k^2$$

$$p^2 = 2k^2$$

p^2 は 2 の倍数となるから

p は 2 の倍数

p と q がともに 2 の倍数となり

p と q が互いに素であることに

矛盾

よって $\sqrt{2}$ は無理数である

(B) $\alpha = \frac{q}{p}$ (p, q は互いに素である自然数)

$$\left(\frac{q}{p}\right)^3 + \frac{q}{p} + 1 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \frac{q^3}{p^3} + \frac{q}{p} + 1 = 0 \\ \frac{q^3}{p^3} = -\frac{q}{p} - 1 \end{array} \right\} \text{両辺} \times p^3$$

p, q は互いに素より $p \nmid 1$

よって $d \in \mathbb{Z}$

$$d^3 + d + 1 = 0$$

$$d(d^2 + 1) = -1$$

$d, d^2 + 1 \in \mathbb{Z}$ より

$$\begin{cases} d = 1 \\ d^2 + 1 = -1 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} d = -1 \\ d^2 + 1 = 1 \end{cases}$$

これらは同時に成り立たない
ので矛盾

よって α は無理数である

(C) (A) $q = 3k \pm 1 \ (k \in \mathbb{Z}, q \geq 1)$ とすると

$$q^3 = (3k \pm 1)^3$$

$$= 3(9k^2 \pm 9k + 1) \pm 1$$

よって q^3 は 3 の倍数ではない

2 つとも真なので与命題も真である

(B) $\sqrt[3]{3} = \frac{q}{p}$ (p, q は互いに素である自然数)

$$\sqrt[3]{3}p = q$$

$$3p^3 = q^3$$

q^3 は 3 の倍数となるから

q は 3 の倍数

$$q = 3k \ (k \in \mathbb{N}) \text{ とおくと}$$

$$3p^3 = 27k^3$$

$$p^3 = 9k^3$$

p^3 は 3 の倍数となるから

p は 3 の倍数

p と q がともに 3 の倍数となり

p と q が互いに素であることに矛盾

よって $\sqrt[3]{3}$ は無理数である

<point>

① 背理法

[6]

$$a + bx = c + dx \text{ である}$$

$a \neq c$ または $b \neq d$ であるものか存在する
と仮定する

$$(b-d)x = c-a$$

(i) $b = d$ のとき

$$a \neq c \text{ または } b \neq d \text{ より } a \neq c$$

このとき左辺 = 0, 右辺 $\neq 0$ となり矛盾

(ii) $b \neq d$ のとき

$$x = \frac{c-a}{b-d}$$

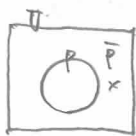
無理数 = 有理数となり矛盾

①, ④より与命題は成り立つ

注
「結論」としてあるものが多い。
問題ではないか「P」という命題に
はそもそも結論はない
背理法とは

命題を否定して矛盾を導きもとの
命題が真であることを示す証明法
です

⑤は「P」という命題なので
Pと仮定して矛盾を導く



U: 全体集合
P: 無理数であるもの
の集合

$\sqrt{2} \in \bar{P}$ として矛盾を導き
 $\sqrt{2} \in P$ を導く。

⑥は「 $p \rightarrow q$ 」という命題なので

$p \rightarrow q$ と仮定して矛盾を導く

$p \rightarrow q$ の否定は

「pであってqでないものがある」
 $p \wedge \bar{q}$

です。

集合で考えれば簡単。
 $p \rightarrow q$ は p を満たすものの集合を P
とすれば、 $P \subset Q$ である
→は $p \rightarrow q$ の真のとき
が成り立つとき
↯は $p \rightarrow q$ の真のとき
に成り
立つとき



この否定は



Pの中でQからはみ出すものがある
すなわち「pであってqでないものがある」である。

「pであってqでないものがある」として
矛盾を示せば、Pの中でQからはみ出すもの
がないので $P \subset Q$ すなわち $p \rightarrow q$ を示せる。

$p \rightarrow q$ の否定や全称命題、特称命題に
ついて高校の教科書ではあまり論じられて
いないので⑥について歯切れが悪かったり
微妙な解答が多い。

[よくある解答]

$bx+d$ とすると

$$ax = \frac{c-a}{b-d}$$

無理数 = 有理数 となり矛盾。

よって $b=d$

したがって $a=c$ □

この解答は誤りではないが説明がかなり
省かれている

この解答はまず

$$ax+bx=cx+d \rightarrow b=d$$

という命題を背理法で示し

$b=d$ であれば、 bx と dx は消えるから

$a=c$ であることが言えると言っている。

まず「より簡単な命題を示してから
元の命題を示している。何をやっているか
はしっかり押さえておきたい。