

$n=5k$ のとき n か 5 の倍数

$n=5k+1$ のとき $9n+9n-1$

$$=9(5k+1)+9(5k+1)-1$$

$$=5(15k+9k+1)$$

5 の倍数

$n=5k-1$ のとき $n+1=5k$ か 5 の倍数

$n=5k+2$ のとき $9n+1=5(9k+1)$ か 5 の

倍数

$n=5k-2$ のとき $9n+9n-1$

$$=9(5k-2)+9(5k-2)-1$$

$$=5(15k-9k+1)$$

5 の倍数

より $n(n+1)(9n+1)(9n+9n-1)$ は 5 の

倍数

よって題意は示された。

注

n : 整数であり負の数についても

上の主張は成り立つ。

<point>

①連続の整数の積は $n!$ の倍数である。

[証明]

$$mC_n = \frac{mP_n}{n!} \quad (m \geq n)$$

$$mP_n = mC_n n!$$

連続 n 整数の積

$mC_n \in \mathbb{Z}$ より $m \geq n$ のとき与命題は

成り立つ

$m < n$ のときは

連続 n 整数に 0 を含むときは

その積は 0 となり与命題は成り立つ

すなわち負のときも、その絶対値を考えると

これはよいから成り立つ。

[4]

$$P = m^2 - 4m^2 - 4m - 5$$

$$= (m-5)(m^2+m+1)$$

$m^2+m+1 \geq 3$ より

$$m-5=1 \quad \therefore m=6 \text{ が必要}$$

このとき

$$P = 97 \text{ (素数)} //$$

<point>

①素数

1 と自分自身以外の約数をもたない

自然数を素数という。1は素数ではない。

[5]

$$\begin{array}{r} 11 \quad 5561 \quad 6059 \quad 1 \\ \quad 5478 \quad 5561 \\ \hline \quad (89) \quad 498 \quad 6 \\ \quad \quad 498 \\ \hline \quad \quad 0 \end{array}$$

エークリットの互除法より

5561 と 6059 の最大公約数は 89 より

$$\frac{5561}{6059} = \frac{67}{79} //$$

<point>

①エークリットの互除法

最大公約数を見つけにくいときは

エークリットの互除法を利用。

[6]

$2m-1$ と $2m+1$ の最大公約数を $d(>0)$ とすると

$$\begin{cases} 2m-1 = k_1 d \cdots ① \\ 2m+1 = k_2 d \cdots ② \end{cases}$$

(k_1, k_2 は互いに素な自然数
 $k_1 < k_2$)

② - ① より

$$(k_2 - k_1)d = 2$$

$k_2 - k_1, d \in \mathbb{N}$ より

$$d = 1, 2$$

$2m-1, 2m+1$ は奇数より $d=1$

よって題意は示された

<point>

① 互いに素

[別解] 背理法

$d > 1$ とし $d=2$ とより

$2m-1, 2m+1$ が偶数となり矛盾

よって $d=1$