

高3数学β 12. 数の理論2

[1]

$m = 7k_1 + 3, n = 7k_2 + 4$ ($k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$) とおける。

$$m + 2n = 7k_1 + 3 + 2(7k_2 + 4) \\ = 7(k_1 + 2k_2 + 1) + 4$$

よって [4]

$$mn = (7k_1 + 3)(7k_2 + 4) \\ = 7(7k_1k_2 + 4k_1 + 3k_2 + 1) + 1$$

よって [5]

$$m^2 = (7k_2 + 4)^2 \\ = 7(7k_2^2 + 2 \cdot 4k_2 + 4^2k_2 + 4) + 1$$

よって [1]

$$m^{2001} = (7k_2 + 4)^{2001} \\ = {}^{2001}C_0 (7k_2)^{2001} + {}^{2001}C_1 (7k_2)^{2000} \cdot 4 + \dots \\ \dots + {}^{2001}C_{2000} 7k_2 \cdot 4^{2000} + {}^{2001}C_{2001} 4^{2001} \\ = 7({}^{2001}C_0 7^{2000} k_2^{2000} + {}^{2001}C_1 7^{1999} k_2^{1999} \cdot 4 \\ + \dots + {}^{2001}C_{2000} k_2 \cdot 4^{2000}) + 4^{2001} \\ = 7N + 64^{667} \quad (N \in \mathbb{N}) \\ = 7N + (7 \cdot 9 + 1)^{667} \\ = 7N + 667C_0 (7 \cdot 9)^{666} + 667C_1 (7 \cdot 9)^{665} \\ + \dots + 667C_{666} (7 \cdot 9) + 1 \\ = 7N + 7M + 1 \quad (M \in \mathbb{N}) \\ = 7(N + M) + 1$$

よって [1]

[別解I 合同式]

以下7を法として考えると

$$m \equiv 3, n \equiv 4$$

$$m + 2n \equiv 3 + 2 \cdot 4 = 11 \equiv 4$$

$$mn \equiv 3 \cdot 4 = 12 \equiv 5$$

$$m^2 \equiv 4^2 = 64 \equiv 1$$

$$m^{2001} \equiv 4^{2001} = 64^{667} \equiv 1^{667} = 1$$

<point>

① 合同式

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ とする

以下 m を法として

$a \equiv c, b \equiv d$ のとき $\leftarrow$ m で割ったときの a と c, b と d の余りがそれぞれ等しいということ

$$d) a + b \equiv c + d$$

$$e) a - b \equiv c - d$$

$$g) ab \equiv cd$$

$$h) a^m \equiv c^m$$

[2]

以下5を法として考える

すべての整数 n は $n \equiv 0, \pm 1, \pm 2$ のいずれかで表される

i) $n \equiv 0$ のとき

$$n^2 + n + 1 \equiv 1 \neq 0$$

ii) $n \equiv 1$ のとき

$$n^2 + n + 1 \equiv 3 \neq 0$$

iii) $n \equiv -1$ のとき

$$n^2 + n + 1 \equiv 1 \neq 0$$

iv) $n \equiv 2$ のとき

$$n^2 + n + 1 \equiv 7 \equiv 2 \neq 0$$

v) $n \equiv -2$ のとき

$$n^2 + n + 1 \equiv 3 \neq 0$$

よって題意は示された。

[3]

d) 奇数は $2k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$) と表せる

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ = 4k(k+1) + 1$$

$k, k+1$ はどちらか一方の偶数であるから $k(k+1)$ は2の倍数より

題意は示された。

③ $a_n = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^n \ (n=1, 2, \dots)$

と定める

a_n は奇数より a_n が平方数であるとすると奇数の平方である

以下 9 を法として

$$a_1 = 11 \equiv 2$$

$$a_2 = 111 \equiv 7$$

$$n \geq 9 \text{ のとき } 10^n \equiv 0 \text{ より}$$

$$a_n \equiv 7 \ (n \geq 9)$$

∴ より a_n は平方数ではない

[4]

以下 4 を法として考える

すべての自然数 n は $n \equiv 0, 1, 2, 3$

のいずれかで表される

n	0	1	2	3
n^2	0	1	0	1

$$n^2 \equiv 0 \text{ or } 1 \text{ より}$$

$$a^2 + b^2 \equiv 0, 1, 2 \text{ のいずれかなので}$$

$$m \neq a^2 + b^2 \text{ は}$$

[5]

① 以下 9 を法として考える

$$a \equiv \pm 1 \text{ のとき } a^2 \equiv 1 \equiv (\pm 1)^2 \pmod{9} \text{ 〇}$$

② a, b がともに 9 の倍数でないとする

$$a^2 + b^2 \equiv 2$$

$$c^2 \equiv 0 \text{ or } 1 \text{ であるから } a^2 + b^2 \neq c^2$$

対偶が真なので 命題も真である

③ a, b が互いに素より

a, b は一方が奇で他方が偶 またはともに奇数

① a, b の一方が奇数で他方が偶数のとき

$$\text{奇数である方を } 2k-1 \ (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{偶数 " } 2l \ (l \in \mathbb{N}) \text{ とおく}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2k-1)^2 + (2l)^2 \\ &= 4(k^2 - k + l^2) + 1 \quad (\text{奇数}) \end{aligned}$$

$$c^2 \text{ は奇数より } c \text{ は奇数} \dots (*)$$

② a, b がともに奇数のとき

$$a = 2k-1, b = 2l-1 \ (k, l \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2k-1)^2 + (2l-1)^2 \\ &= 4(k^2 - k + l^2 - l) + 2 \dots \text{ 〇} \end{aligned}$$

$$c^2 \text{ は 4 で割った余りが 2 となる}$$

$$\text{ことはないので } a^2 + b^2 \neq c^2 \text{ は}$$

$$\text{成り立たない、すなわち}$$

$$a^2 + b^2 \neq c^2 \text{ が成り立つとき } a, b, c$$

$$\text{ともに奇数となることはない}$$

①, ② より 題意は示された

注

合同式で解こうとしたときに $\text{mod } 2$ ではうまくいかないが、(*) の形を見れば $\text{mod } 2$ より $\text{mod } 4$ だとうまくいく。この問題のように合同式は簡単に解けるかわりに情報をかなり捨ててしまうので文字を使って解いた方が見通しがよい場合もある。両方マスターすべきである。

[別解]

③ 以下4を法として考える

すなわち自然数 n は $n \equiv 0, 1, 2, 3$

のいずれかで表せる

a_1	0	1	2	3
a^2	0	1	0	1

$a^2 \equiv 0, 1$ より

$a^2 + b^2 = c^2$ を満たすとき

a, b が互いに素より

$a^2 \equiv 0, b^2 \equiv 1$ or $a^2 \equiv 1, b^2 \equiv 0$

よって

$c^2 \equiv 1 \quad \therefore c \equiv 1, 3$

したがって c は奇数