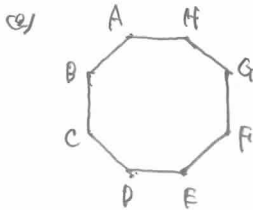


高3 数学β 16. 組合せ

①

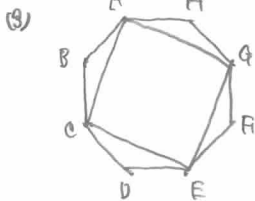
d) ${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ 個}$



ABを共有するものは6個
 よって少なくとも1辺を共有するものは $6 \times 8 = 48$ 個

2辺を共有するものを2回数えているから

$48 - 8 = 40 \text{ 個}$



辺を共有しないためには各頂点から少なくとも2つ以上は離れていなければならぬ

このようなものは四角形 ACEG と BDFH のみ

よって

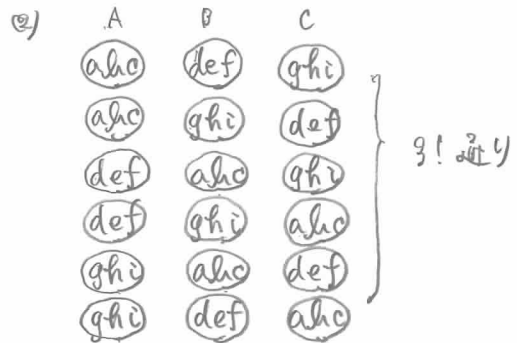
${}_8C_4 - 2 = 68 \text{ 個}$

<point>

① 組合せ

②

d) ${}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 = 1680 \text{ 通り}$
残り6人から 3人を選ばず
 残り3人から 3人を選ばず



1組に区別があれば異なるものになる
 なければ、同じもの

$\frac{1680}{3!} = 280 \text{ 通り}$
abc, def, ghi の並べ方は

g) $\frac{{}_9C_2 \times {}_7C_2 \times {}_5C_2}{2!} = 378 \text{ 通り}$

h) $2^a, 2^b, 2^c > 0$ であるから
 相加相乗平均より

$2^a + 2^b + 2^c \geq 3\sqrt[3]{2^a 2^b 2^c} = 3\sqrt[3]{2^{a+b+c}} = 3\sqrt[3]{2^9} = 24$

等号成立は

$2^a = 2^b = 2^c \quad \therefore a = b = c = 3$ のとき

よって

最小値 24

<point>

① 組分け

③

7. 0 6個, 1 2個の並べ方に等しいから

$$\frac{8!}{6!2!} = 28 \text{通り}$$

1. 先に1本ずつ買っておいて

残りの3本の組合せを考えればよい

0 3個, 1 2個の並べ方に等しいから

$$\frac{5!}{3!2!} = 10 \text{通り}$$

2. 0 3個, 1 2個の並べ方に等しいから

10通り

<point>

① 重複組合せ

④

d) $a+b+c=10, a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$

a, b, c に1ずつ分配して

残りの7の分配を考えればよい

$a'+b'+c'=7, a' \geq 0, b' \geq 0, c' \geq 0$

の整数 a', b', c' の組の総数に等しい

これは 0 7個, 1 2個の並べ方に等しいから

$$\frac{9!}{7!2!} = 36 \text{個}$$

e) $a+b+c \leq 10, a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$

同様に

$a'+b'+c' \leq 7, a' \geq 0, b' \geq 0, c' \geq 0$

の整数 a', b', c' の組の総数に等しい

これは $a'+b'+c'+d=7, a' \geq 0, b' \geq 0, c' \geq 0, d \geq 0$

の整数 a', b', c', d の組の総数に等しい

$$\begin{cases} d=0 \text{ のときは } a'+b'+c'=7 \\ d=1 \text{ " } a'+b'+c'=6 \\ \vdots \\ d=7 \text{ " } a'+b'+c'=0 \end{cases}$$

つまり $a'+b'+c' \leq 7$ を一括して考えてよい

0 7個, 1 3個の並べ方に等しいから

$$\frac{10!}{7!3!} = 120 \text{個}$$

⑤ ④を満たすものから ← 全体集合

⑤を満たし ④を満たさないものを

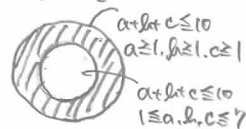
除けばよい (余事象)

これは

$$(a, b, c) = (8, 1, 1), (1, 8, 1), (1, 1, 8)$$

の3通りより

$$120 - 3 = 117 \text{個}$$



⑤

d) ${}^2C_9 \times {}^5C_6 \times {}^3C_3 = 560 \text{通り}$

e) A, B, C の重複順列と考えると

$${}^3P_8 = 6561 \text{通り}$$

⑥ $\begin{pmatrix} \text{品目} \\ \text{A B A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{品目} \\ \text{C} \end{pmatrix}$ のように感じ

$${}^3P_8 - {}^3C_2(2^2 - 2) - 3 = 5796 \text{通り}$$

↑ 2人1組 ↑ 1人1組

<point>

⑦ 区別かつものを区別かつ人に配るときは重複順列

6

① 人を区別しないので区別できるのは人数のみ。

また部屋も区別しないので人数が増えるような並び方のみを考えて

$(1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2)$

の3通り。

② 部屋を区別すれば1人で数字の並び方が異なるものは違うものとなるから

$$\frac{9!}{2!} + 9! + \frac{9!}{3!} = 10 \text{ 通り}$$

③ $9^6 - 9C_2(2^6 - 2) - 9 = 540$ 通り。

[別解]

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{1人, 1人, 4人の} \\ \text{組合せ}}}{6C_1 \times 6C_1} \times \frac{9!}{2!} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1人, 2人, 2人の} \\ \text{組合せ}}}{6C_1 \times 6C_2} \times 9! + \underset{\substack{\uparrow \times \frac{9!}{3!} \\ \text{2人, 2人, 2人の} \\ \text{組合せ}}}{6C_2 \times 6C_3} \times \frac{9!}{3!}$$

$$= 540 \text{ 通り}$$