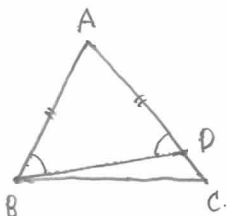


高3 数学β 21. 図形の性質

[1]

d)



辺AC上に $AB=AD$ となる点Dをとる
このとき

$$\angle ABD = \angle ADB \dots \textcircled{a}$$

$$\angle B = \angle ABD + \angle CBD$$

$$\angle C = \angle ADB - \angle CBD$$

$$= \angle ABD + \angle CBD - 2\angle CBD \text{ (aより)}$$

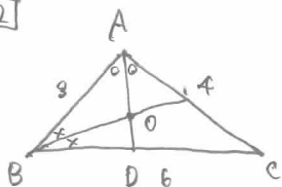
$$= \angle B - 2\angle CBD < \angle B \text{ 〇}$$

② $AC > AB$ であって $\angle B \leq \angle C$ と仮定する

$AC > AB$ であるから、より $\angle B > \angle C$
となり矛盾。

よって命題②は示された。□

[2]



〇の内心より

ADは $\angle A$ の二等分線

BOは $\angle B$ " である

角の二等分線の定理より

$$BD:DC = AB:AC$$

$$= 9:4$$

よって

$$BD = 6 \times \frac{9}{7} = \frac{18}{7}$$

角の二等分線の定理より

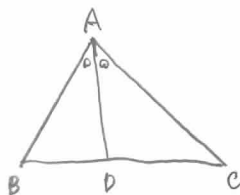
$$AO:OD = AB:BD$$

$$= 9:\frac{18}{7}$$

$$= 7:6$$

<point>

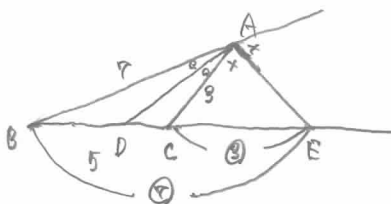
① (内)角の二等分線の定理



ADが $\angle A$ の二等分線

$$\Leftrightarrow BD:DC = AB:AC$$

[3]



(内)角の二等分線の定理より

$$BD:DC = AB:AC$$

$$= 9:4$$

よって

$$DC = 5 \times \frac{4}{9} = \frac{20}{9}$$

外角の二等分線の定理より

$$BE:EC = AB:AC$$

$$= 9:4$$

よって

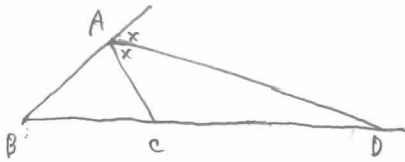
$$CE = 5 \times \frac{4}{9} = \frac{20}{9}$$

よって

$$DE = \frac{20}{9} + \frac{15}{4} = \frac{21}{4}$$

<point>

① 外角の二等分線の定理

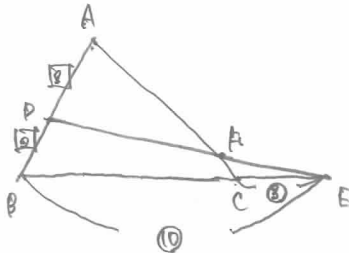


ADが∠Aの外角の二等分線

$$\Leftrightarrow BD:DC = AB:AC$$

[4]

中



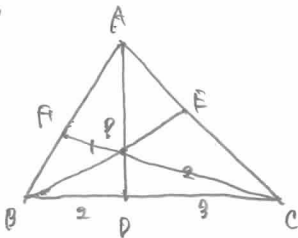
メネラウスの定理より

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$$

②



メネラウスの定理より

$$\frac{FA}{AB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

$$\frac{FA}{AB} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1 \quad \therefore \frac{FA}{AB} = \frac{3}{4}$$

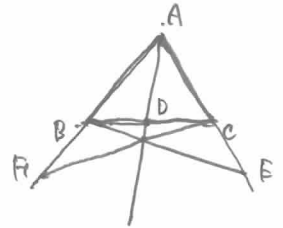
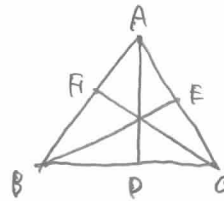
チェバの定理より

$$\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BP}{PC} = 1$$

$$\frac{CE}{EA} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} = 1 \quad \therefore \frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$$

<point>

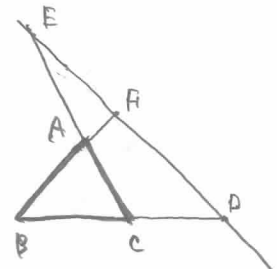
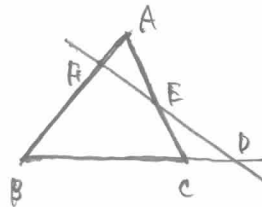
① チェバの定理



AD, BE, CFが1点で交わる

$$\Leftrightarrow \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

② メネラウスの定理

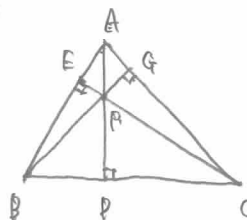


D, E, Fが同一直線上にある

$$\Leftrightarrow \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

[5]

①



$$\angle BEF + \angle BPF = 180^\circ \text{より}$$

四角形 BPEF は円に内接する口

$$\textcircled{3} \angle AFE = \angle CFE \text{ (対頂角) より}$$

$$\angle EAF = \angle DCF$$

よって円周角の定理の逆より

四角形 AEDC は円に内接する口

$$\textcircled{3} \triangle ABG \text{ と } \triangle ACE \text{ において}$$

$$\angle BAG = \angle CAE \text{ (共通)}$$

$$\angle BGA = \angle CEA = 90^\circ$$

二角相等より

$$\triangle ABG \sim \triangle ACE \text{ 口}$$

$$\textcircled{4} \angle AEF + \angle AGF = 180^\circ \text{ より}$$

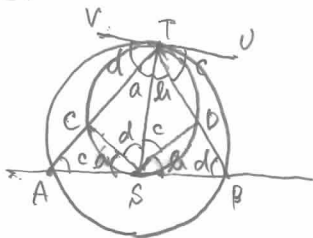
㉑ と同様口

<point>

① 円周角の定理とその逆.

② 内接四角形の定理とその逆.

[6]



図のように
C, D, U, V を
おく

$$\angle ATS = a, \angle BTS = b \text{ とおく}$$

$$\angle UTB = c \text{ とおく と接弦定理より}$$

$$\angle TSD = \angle TAS = c$$

$$\angle VTA = d \text{ とおく と接弦定理より}$$

$$\angle TSC = \angle TBS = d$$

$$\triangle AST \text{ の内角の和は } 180^\circ \text{ より}$$

$$2a + c + d = 180^\circ \dots \textcircled{1}$$

$$\triangle PTS \text{ で同様にして}$$

$$2b + c + d = 180^\circ \dots \textcircled{2}$$

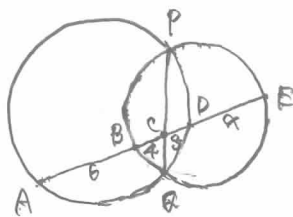
$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より}$$

$$a = b \text{ 口}$$

<point>

① 接弦定理.

[7]



DE = x とおく

方べきの定理より

$$CP \cdot CQ = CA \cdot CB$$

$$= 90.$$

$$CP \cdot CE = CP \cdot CD$$

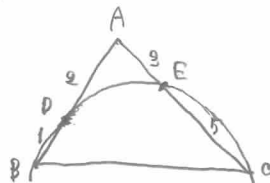
$$4(x+3) = 90$$

$$x+3 = \frac{15}{2} \quad \therefore x = \frac{9}{2}$$

<point>

① 方べきの定理. 1.

[8]



$$AD = 2a, BD = a, AE = 3h, CE = 5h \text{ とおく}$$

方べきの定理より $(a, h \in \mathbb{R}, a, h > 0)$

$$AP \cdot AB = AE \cdot AC$$

$$6a^2 = 24h^2$$

$$\therefore a^2 = 4h^2 \quad \therefore a = 2h$$

∴

$$AB:AC=3a:8b \\ =6b:8b=3:4$$

<point>

① 方べきの定理 2.

9

d) 方べきの定理より

$$RB \cdot RA = RQ^2$$

$$4 \cdot 10 = RQ^2 \quad \therefore RQ = \boxed{2\sqrt{10}}$$

e) $AP = 6\sqrt{2}$

$\triangle PAC$ の $\triangle PQR$ で

相似 $\because \angle P = \sqrt{2} : 1$ より

$$PQ = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{5\sqrt{2}}$$

$$PR = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$AR = AP + PR = 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = \boxed{7\sqrt{2}}$$

$\triangle ARQ$ と $\triangle RQB$ において

$$\angle QAR = \angle QBR \quad (\text{接弦定理})$$

$$\angle ARQ = \angle RQB \quad (\text{共通})$$

∴ $\triangle ARQ \sim \triangle RQB$

$$QR = \boxed{\frac{7}{5}} BR$$

③ 方べきの定理より

$$RB \cdot RA = RQ^2$$

$$BR(BR+6) = \frac{49}{25} BR^2$$

$$\frac{24}{25} BR^2 - 6BR = 0$$

$$\frac{24}{25} BR(BR - \frac{25}{4}) = 0$$

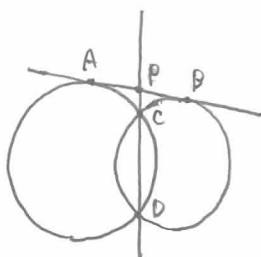
$$BR > 0 \text{ より } BR = \boxed{\frac{25}{4}}$$

<point>

① 方べきの定理 2.

10

d)



とおく。

方べきの定理より

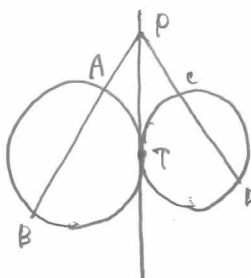
$$PA^2 = PC \cdot PD \quad \dots \textcircled{1}$$

$$PB^2 = PC \cdot PD \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$PA^2 = PB^2 \quad \therefore PA = PB \quad (PA, PB > 0) \text{ のとき}$$

e)



とおく

方べきの定理より

$$PA \cdot PB = PT^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$PC \cdot PD = PT^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

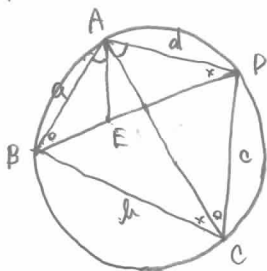
①, ②より

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

方べきの定理の逆より

A, B, C, D は同一円周上にある

11



$\triangle ABE$ と $\triangle ACP$ において
 $\angle BAE = \angle CAD$ (仮定より) ... ①
 $\angle ABE = \angle ACP$ ($\widehat{AC}$ に対する
 (円周角)) ... ②

①, ② から二角相等より
 $\triangle ABE \sim \triangle ACP$... ③

$\triangle AED$ と $\triangle ABC$ において
 $\angle EAD = \angle BAC$ ($\angle BAE = \angle CAD$ より)
 $\angle ADE = \angle ACB$ ($\widehat{AB}$ に対する
 (円周角)) ... ④

③, ④ から二角相等より
 $\triangle AED \sim \triangle ABC$... ⑤

⑤ より

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BE}{ED} = \frac{CP}{PD}$$

$$\therefore AC = AE \cdot BE \leftarrow ac \text{ を作る}$$

⑤ より ... ⑥

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{ED} = \frac{BE}{ED} = \frac{CP}{PD}$$

$$\therefore bd = AE \cdot ED \leftarrow bd \text{ を作る}$$

⑤+⑥ より

$$ac + bd = AE \cdot (BE + ED) \\ = AE \cdot BP \quad \square$$

<point>

① トーリー (ポトレマイオス) の定理.

12

① P. 8 1, 9 13, 4

$$I. 8 \times 9 \div 4 = 6$$

$$J. 9. 10. 9.$$

$$K. 8 \times 9 \div 2 = 12$$

$$L. 10 - 2 + 2 = 2$$

$$M. 7. (12 \times 5 + 20 \times 6) \div 3 = 60$$

$$N. (12 \times 5 + 20 \times 6) \div 2 = 90$$

④ n 多面体 ($n \geq 4$) が存在するとき

1つの頂点に m 個 ($3 \leq m \leq 5$) の

正 n 角形の面が m 個集まっていて、

$$v - e + f = 2 \quad \text{より}$$

立体が成るための条件

$$\frac{3m}{m} - \frac{3m}{2} + m = 2$$

$$6m - 3m = 4m$$

$$3m - 3m = 0$$

$$(m-6)(m+4) = -24$$

$$\begin{array}{r|rrrr} m-6 & -3 & -2 & -1 \\ \hline m+4 & 8 & 12 & 24 \end{array}$$

$$\therefore m = 4, 8, 20, \dots$$

⑤ 同様に

1つの頂点に 3 個の

正 n 角形の面が 3 個集まっていて

$$\frac{4m}{3} - \frac{4m}{2} + m = 2$$

$$\frac{m}{3} = 2 \quad \therefore m = 6 \quad \square$$

同様に

1つの頂点に3個の

正五角形の面が集まっているとして

$$\frac{5n}{3} - \frac{5n}{2} + n = 2$$

$$\frac{n}{6} = 2 \quad \therefore n = 12 \dots \%$$

<point>

① オイラーの多面体定理

注

ちなみに各面が正n角形 ($n \geq 6$)

のときは1つの頂点に3つ以上の面

を集めると角度の和が 960° 以上と

なるので立体は作れない。