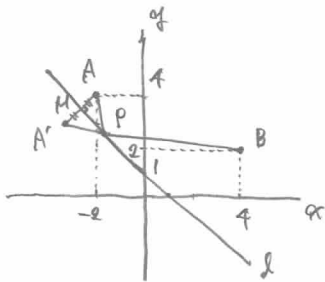


高3 数学Ⅲ 21. 点と直線

1

①



Aとlに関して対称な点をA'とする
A'(a, h)とすると

AとA'の中点M($\frac{a-2}{2}, \frac{h+4}{2}$)は

l上の点より

$$\frac{a-2}{2} + \frac{h+4}{2} = 1$$

$$\therefore a+h=0 \dots ①$$

AA' ⊥ l より

$$\frac{h-4}{a+2} \times (-1) = -1$$

$$h-4=a+2$$

$$\therefore a-h=-6 \dots ②$$

①, ② より

$$a=-3, h=3 \therefore A'(-3, 3)$$

AP = A'P より

$$AP+PB=A'P+PB$$

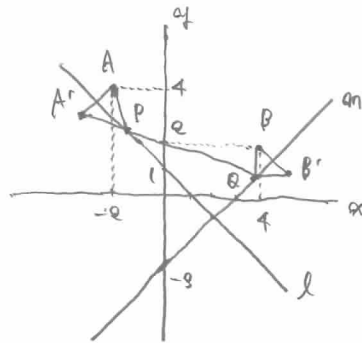
AP+PBが最小となるのは

A, P, Bが一直線上に並ぶときで

このときPは直線lと直線A'Bの
交点より $x+y=1 \quad y=-\frac{1}{7}x+\frac{18}{7}$

$$P(-\frac{11}{6}, \frac{17}{6})$$

②



Bとmに関して対称な点をB'とすると

(同様に)より

$$B'(5, 1) \leftarrow$$

(a, h)とy=xに関して対称な
点は(h, a)であることが判明して
Bとmをy軸右側に90度回して
対称点とと、y軸左側に-9
度回してよい。

$$AB=QB' \text{ より}$$

$$AP+PQ+QB=A'P+PQ+QB'$$

AP+PQ+QB'が最小となるのは

A', P, Q, B'が一直線上に並ぶときで

このときPは直線lと直線A'B

Qは m

A'B'の交点より

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$$

$$P(-\frac{5}{9}, \frac{8}{9}), Q(\frac{21}{5}, \frac{6}{5})$$

③

$$OA=\sqrt{50}$$

$$OB=\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{50}$$

△OABはOA=OBの

二等辺三角形

∠BOAの二等分線はABの中点M(3, 6)

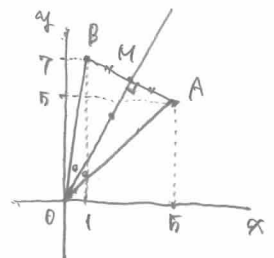
を通るから

$$y=2x$$

△OABの面積Sは

$$S=\frac{1}{2}AB \cdot OM$$

$$=\frac{1}{2} \cdot 20\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 150$$



内接円の半径を r とすると

$$S = \frac{1}{2} (OA + AB + BO) r \text{ より}$$

$$15 = \frac{1}{2} (5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}) r$$

$$15 = (5\sqrt{2} + \sqrt{5}) r$$

$$\therefore r = \frac{15}{5\sqrt{2} + \sqrt{5}} \\ = \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{5}}{9}$$

$\triangle OAB$ の内心を I とすると

$$\vec{OI} = \frac{OI}{OM} \vec{OM} \\ = \frac{9\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{5}}{9}}{9\sqrt{5}} \left(\frac{9}{6} \right) \\ = \frac{10 - \sqrt{10}}{9} \left(\frac{9}{6} \right)$$

$$\therefore I \left(\frac{10 - \sqrt{10}}{9}, \frac{20 - 2\sqrt{10}}{9} \right)$$

① OA の垂直二等分線は

O と A の中点 $N \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right)$ を通り

OA と垂直であるから傾きは -1 より

$$y - \frac{5}{2} = - \left(x - \frac{5}{2} \right)$$

$$\therefore y = -x + 5$$

$\triangle OAB$ の外心はこれと OM の交点より

$$\left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3} \right)$$

② B を通り OA に垂直な直線は

$$y - 7 = - (x - 1)$$

$$\therefore y = -x + 8$$

$\triangle OAB$ の垂心はこれと OM の交点より

$$\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3} \right)$$

<point>

① 本問は二等辺三角形から一般の三角形にも拡張できるようにしてある。

②

$$(k-2)x + (4k+3)y - 2k + 15 = 0$$

$$(x+4y-2)k + (-2x+3y+15) = 0$$

k が任意の k で成り立つとき

$$\begin{cases} x+4y-2=0 \\ -2x+3y+15=0 \end{cases} \therefore x=6, y=-1$$

よって①は k の値に依らず $A(6, -1)$ を通る。

①の法線ベクトル $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} k-2 \\ 4k+3 \end{pmatrix}$

②の法線ベクトル $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

①と②が垂直するとき

$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ であるから $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ より

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \cdot (k-2) + 2(4k+3) \\ = 9k+4=0 \therefore k = -\frac{4}{9}$$

$k = -\frac{4}{9}$ のとき①は

$$-\frac{29}{9}x + \frac{11}{9}y + \frac{149}{9} = 0$$

$$2x - y = 13$$

①と②の交点は

$$\left(\frac{29}{5}, -\frac{19}{5} \right)$$

$$\text{②} \quad \sqrt{\left(\frac{7}{5} \right)^2 + \left(\frac{14}{5} \right)^2} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

③ ①と②が平行であるとき

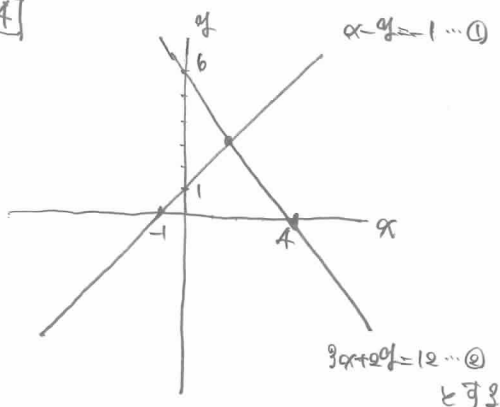
$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ であるから $\vec{n}_1 = t\vec{n}_2 \ (t \in \mathbb{R})$ より

$$\begin{pmatrix} k-2 \\ 4k+3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} k-2=t \\ 4k+3=2t \end{cases} \therefore k = -\frac{7}{2}$$

(このとき①と②は)
一致しない

[4]



①と②の交点は $(2, 1)$

$$kx - y = k - 1 \dots ③$$

$$y = k(x - 1) + 1 \text{ は}$$

$(1, 1)$ を通り傾き k の直線

①~③が三角形を作らないとき

$$① // ③ : k = 1$$

$$② // ③ : k = -\frac{3}{2}$$

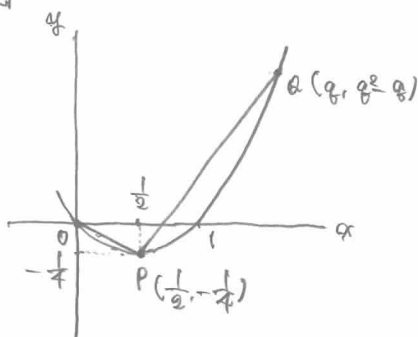
③が $(2, 1)$ を通る

$$1 = k + 1 \quad \therefore k = 0$$

よって

$$k = -\frac{3}{2}, 1, 0 //$$

[5]



$\angle OPA$ が直角であるとき ($\vec{PO} \neq \vec{O}$)

$\vec{PO} \perp \vec{PQ}$ であるから $\vec{PO} \cdot \vec{PQ} = 0$ より

$$\vec{PO} \cdot \vec{PQ} = \left(-\frac{1}{2}\left(q - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(q^2 - q + \frac{1}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}q^2 - \frac{3}{4}q + \frac{5}{16} = 0$$

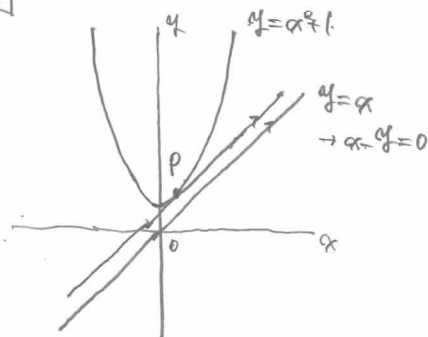
$$4q^2 - 12q + 5 = 0$$

$$(2q - 1)(2q - 5) = 0 \quad \therefore q = \frac{5}{2} \quad (q \neq \frac{1}{2})$$

よって

$$Q\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) //$$

[6]



図のように $y = x$ に平行で $y = x^2 + 1$ に

接する直線をい

この直線を $y = x + k$ とおくと

$$x^2 + 1 = x + k$$

$$x^2 - x - k + 1 = 0$$

判別式を D とし

$$D = 1^2 - 4(-k + 1)$$

$$= 4k - 3 = 0 \quad \therefore k = \frac{3}{4}$$

$$\text{接点は } \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) \dots P //$$

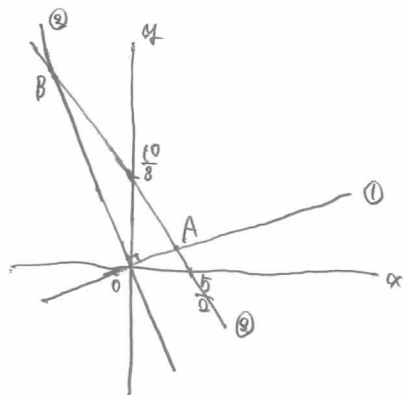
P がこの点であるとき P と $y = x$ の距離は

は最小でこのときこの距離は

$$\frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8} //$$

7

$$\begin{cases} x - 9y = 0 \rightarrow y = \frac{1}{9}x \dots ① \\ 9x + y = 0 \rightarrow y = -9x \dots ② \\ 4x + 9y = 10 \dots ③ \end{cases}$$



①と③の交点をAとすると $A(2, \frac{2}{9})$

② ③ B B(-2, 6)

$\angle AOB = 90^\circ$ より

$\triangle OAB$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} OA \cdot OB \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{10}}{9} \cdot 2\sqrt{10} = \boxed{\frac{20}{9}} \end{aligned}$$

AB は $\triangle OAB$ の外接円の直径より
外接円の半径 R は

$$\begin{aligned} R &= \frac{AB}{2} \\ &= \frac{\sqrt{4^2 + (\frac{10}{9})^2}}{2} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

<point>

① 直角があれば、三角形の面積も外心の座標も簡単に求まるので、まずは直角があるかを考える

② 一般の三角形でもできるようにしておくと