

高3 数学B 24. 三角形と三角比

[1]

$$\sin 140^\circ + \cos 190^\circ + \tan 120^\circ$$

$$\sin 140^\circ = \sin (180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$$

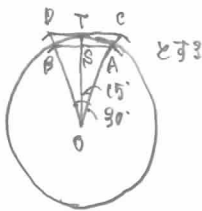
$$\cos 190^\circ = \cos (180^\circ - 10^\circ) = -\cos 10^\circ$$

$$= -\cos (90^\circ - 40^\circ) = -\sin 40^\circ \text{ より}$$

$$= \sin 40^\circ - \sin 40^\circ - \sqrt{3} = -\sqrt{3} //$$

[2]

d)



内接する正十二角形の面積 S は

$$S = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ = 3 //$$

1辺の長さを l とすると

$$l^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ$$

$$l^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore l = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad (l > 0)$$

$$= \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \quad \left(\begin{array}{l} AS = OA \sin 15^\circ \\ l = 2AS \\ \angle C = 90^\circ \end{array} \right. //$$

$$\textcircled{e} \quad \frac{1}{2} AB \cdot OS = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ \text{ より}$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \cdot OS = \frac{1}{2}$$

$$OS = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$\triangle OAB \sim \triangle OCP$ で相似比は

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} : 1 \text{ より}$$

外接する正十二角形の面積 T は

$$T = \left(\frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \right)^2 \cdot 3$$

$$= (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 \cdot 3$$

$$= (8 - 4\sqrt{3}) \cdot 3 = 24 - 12\sqrt{3}$$

1辺の長さを l' と

$$l' = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{2} = 4 - 2\sqrt{3} //$$

[別解]

$$CT = OT \tan 15^\circ$$

$$\tan 15^\circ = \tan (45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3} \text{ より}$$

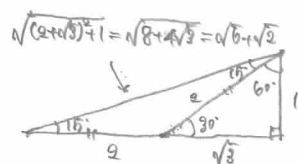
$$CT = 2 - \sqrt{3}$$

よって

$$T = 24 \cdot \triangle OCT = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2 - \sqrt{3}) = 24 - 12\sqrt{3} //$$

$$l' = 2CT = 2(2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3} //$$

注



図のように直角三角形を用いて

$$\tan 15^\circ = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

9)

① 余弦定理より

$$19^2 = 14^2 + 15^2 - 2 \cdot 14 \cdot 15 \cdot \cos A$$

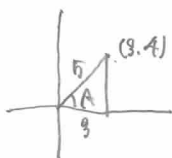
$$\cos A = \frac{14^2 + 15^2 - 19^2}{2 \cdot 14 \cdot 15}$$

$$= \frac{15^2 + 27}{2 \cdot 14 \cdot 15} \leftarrow 14^2 - 19^2 = (14+13)(14-13)$$

$$= \frac{9 \cdot 28}{2 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{9}{5}$$

$$\cos A = \frac{9}{5}, 0^\circ < A < 180^\circ \text{ より}$$

$$\sin A = \frac{4}{5}$$



② 正弦定理より

$$\frac{19}{\sin A} = 2R \quad CR: \triangle ABC \text{ の外接円の半径}$$

$$2R = \frac{65}{4} \quad \therefore R = \frac{65}{8}$$

外接円の半径を r とする

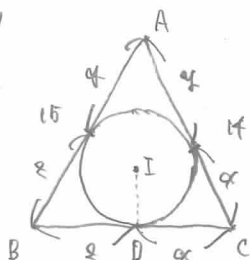
$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} (13 + 14 + 15) r$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 \cdot \sin A = 84 \text{ より}$$

$$84 = 21r \quad \therefore r = 4$$

9)



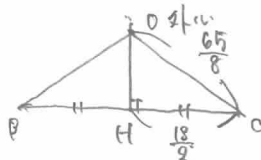
13

(円外の点から円に引いた2本の接線の長さはいずれも等しいから)

図のように x, y, z とおくと

$$\begin{cases} x+y=14 \\ y+z=15 \\ z+x=13 \end{cases}$$

$$\therefore DC = x = 6$$



外心を O , O から BC に下ろした垂線の足を H とする

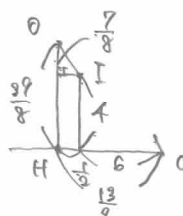
図より

$$OH = \sqrt{\left(\frac{65}{8}\right)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{65^2 - 13^2}}{8}$$

$$= \frac{13\sqrt{5^2 - 1^2}}{8} = \frac{39}{8}$$

内心を I とする



$$OI = \sqrt{\left(\frac{4}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{8}$$

4)

$a+1$ が最大 ($a-1 < a < a+1$)

三角形の存在条件より

$$a+1 < (a-1)+a$$

$$\therefore a > 2$$

鈍角三角形となるためには

$$(a+1)^2 > (a-1)^2 + a^2$$

$$a^2 + 2a + 1 > a^2 - 2a + 1$$

$$a^2 - 4a < 0 \quad a(a-4) < 0 \quad \therefore 0 < a < 4$$

$$a > 2 \text{ より } 2 < a < 4$$

最大辺に対する角が最大角より $a+1$ に
 対する角が $\frac{2\pi}{3}$ である

$$(a+1)^2 = a^2 + (a-1)^2 - 2a(a-1) \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$a^2 + 2a + 1 = 9a^2 - 9a + 1$$

$$9a^2 - 11a = 0$$

$$a(9a - 11) = 0$$

$$2 < a < 4 \text{ より } a = \frac{11}{9}$$

外接円の半径を R とすると

$$\frac{\frac{7}{2}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = 2R$$

$$R = \frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

内接円の半径を r とすると

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} r \left(\frac{9}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} \right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} r \quad \therefore r = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

<point>

① 三角形の成立条件

$$\begin{cases} a < b+c \dots ① \\ b < c+a \dots ② \\ c < a+b \dots ③ \end{cases}$$



(1辺の長さはいずれも2辺の和より
 小さい)

$$\Leftrightarrow |b-c| < a < b+c$$

[証明]

$$\textcircled{1} \text{ より } a < b+c$$

$$\textcircled{2} \text{ より } b-c < a$$

$$\textcircled{3} \text{ より } c-b < a$$

$$b-c, c-b \leq |b-c| \text{ より}$$

$$|b-c| < a < b+c$$

注

a が最大辺と分かっているときは

②, ③ は明らかなので ④ だけよい。

② 鋭角, 直角, 鈍角三角形

① 鋭角三角形

$$\begin{cases} a^2 < b^2 + c^2 \dots ① \\ b^2 < c^2 + a^2 \dots ② \\ c^2 < a^2 + b^2 \dots ③ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |b^2 - c^2| < a^2 < b^2 + c^2$$

[証明]

① について

余弦定理より

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$0 < A < 90^\circ$ であるから $\cos A > 0$ より

$$< b^2 + c^2$$

②, ③ も同様。

$\Leftrightarrow$ は三角形の成立条件と同様

注

a が最大辺と分かっているときは

②, ③ は明らかなので ④ だけよい。

④ 直角三角形

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ or } b^2 = c^2 + a^2 \text{ or } c^2 = a^2 + b^2$$

⑤ 鈍角三角形

$$a^2 > b^2 + c^2 \text{ or } b^2 > c^2 + a^2 \text{ or } c^2 > a^2 + b^2$$

⑥, ⑦ は ① の否定

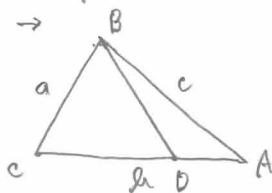
② のように条件を満たすものがあれば
 直角三角形であり、なければ鈍角三角形
 ということ。

⑧ について a が最大辺と分かっているとき
 は a に対する角が最大となり A が鈍角となり
 から ④ だけよい。(⑤, ⑥ は B, C が鈍角
 になって成り立たない)

$$\textcircled{3} a < b < c \Leftrightarrow A < B < C$$

[証明]

→



・ $a < b \rightarrow A < B$ を示す

$a < b$ より CA 上に $CB = CD$ となる点 D がとれる。

このとき

$$\angle CBD = \angle CDB$$

また

$$\angle CBD = B - \angle ABD$$

$$\angle CDB = A + \angle ABD$$

よって

$$B - \angle ABD = A + \angle ABD$$

$$\therefore B = A + 2\angle ABD > A$$

$b < c \rightarrow B < C$ も同様

・ $A < B \rightarrow a < b$ を示す

$A < B$ であって $a \geq b$ であるものがないと仮定

上の証明より $a \geq b \rightarrow A \geq B$ より矛盾。

よって $A < B \rightarrow a < b$

$B < C \rightarrow b < c$ も同様。

[5]

$$\textcircled{1} |(3x-3) - (x+1)| < 6 < (3x-3) + (x+1)$$

$$\textcircled{1} |2x-4| < 6$$

$$-6 < 2x-4 < 6 \quad \therefore -1 < x < 5 \dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{2} 6 < 4x-2 \quad \therefore x > 2 \dots \textcircled{2}$$

①, ② より

$$2 < x < 5$$

④ 余弦定理より

$$(3x-3)^2 = (x+1)^2 + 6^2 - 2 \cdot (x+1) \cdot 6 \cdot \cos A$$

$$9x^2 - 18x + 9 = x^2 + 6x + 41$$

$$8x^2 - 24x - 32 = 0$$

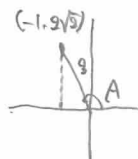
$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x+1)(x-4) = 0$$

$$-1 < x < 5 \text{ より } x = 4$$

$$\cos A = -\frac{1}{3}, \quad 0 < A < 180^\circ \text{ より}$$

$$\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



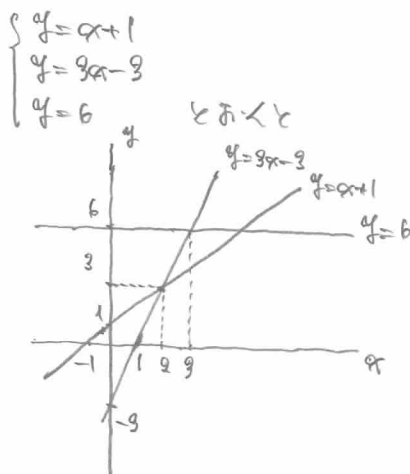
$\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 10\sqrt{2}$$

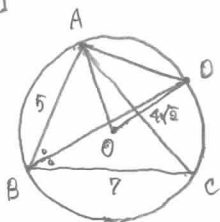
注.

$x+1$ と $3x-3$ と 6 は x の値によって、大小、

関係かわることに注意



6



余弦定理より ($\triangle ABC$)

$$(4\sqrt{2})^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos B$$

$$\cos B = \frac{25 + 49 - 32}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{9}{5}$$

$$\cos B = \frac{9}{5}, 0 < B < 180^\circ \text{ より}$$

$$\sin B = \frac{4}{5}$$

正弦定理より

$$2R = \frac{4\sqrt{2}}{\sin B} = 5\sqrt{2} \therefore R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

中心角 = $2 \times$ (円周角) より

$$\angle AOD = B$$

余弦定理より ($\triangle AOD$)

$$AD^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cos B$$

$$= \frac{4^2 \cdot 25}{2} = 10$$

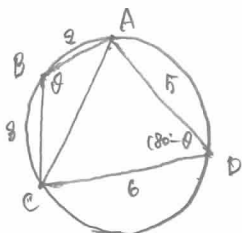
$$\therefore AD = \sqrt{10}$$

$\triangle AOD$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \sin B = \boxed{5}$$

7

d)



$\angle B = \theta$ とすると $\angle D = 180 - \theta$

$\triangle ABC$ で余弦定理より

$$AC^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos \theta$$

$$= 13 - 12 \cos \theta \dots \textcircled{1}$$

$\triangle ACD$ で余弦定理より

$$AC^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos (180 - \theta)$$

$$= 61 + 60 \cos \theta \dots \textcircled{2}$$

①, ② より

$$13 - 12 \cos \theta = 61 + 60 \cos \theta$$

$$72 \cos \theta = -48 \therefore \cos \theta = -\frac{2}{3}$$

このとき

$$AC^2 = 13 - 12 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= 21$$

$$\therefore AC = \sqrt{21} \quad (AC > 0)$$

e) $\cos B = -\frac{2}{3}, 0 < B < 180^\circ$ より

$$\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



円 O は $\triangle ABC$ の外接円であり、

正弦定理より

$$2R = \frac{\sqrt{21}}{\sin B} = \frac{3\sqrt{105}}{5} \therefore R = \frac{3\sqrt{105}}{10}$$

f) 四角形 $ABCD$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin (180 - \theta)$$

$$= 18 \sin \theta$$

$$= 18 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \boxed{6\sqrt{5}}$$

g) 内接円 α の半径を r とすると

$$\frac{1}{2} (2 + 3 + 5 + 6) r = 6\sqrt{5}$$

$$8r = 6\sqrt{5}$$

$$\therefore r = \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

8

余弦定理より

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(b) 同様にして

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$a \cos A = b \cos B$ より

$$a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(c^2 + a^2 - b^2)$$

$$a^2 b^2 + a^2 c^2 - a^4 = b^2 c^2 + a^2 b^2 - b^4$$

$$c^2(a^2 - b^2) - (a^4 - b^4) = 0$$

$$c^2(a^2 - b^2) - (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = 0$$

$$(a^2 - b^2)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

$$(a - b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$\therefore a - b = 0 \text{ or } a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

$$\therefore a = b \text{ or } a^2 + b^2 = c^2$$

$\therefore \triangle ABC$ は

$CA = CB$ の二等辺三角形 または

$\angle C = 90^\circ$ の直角三角形