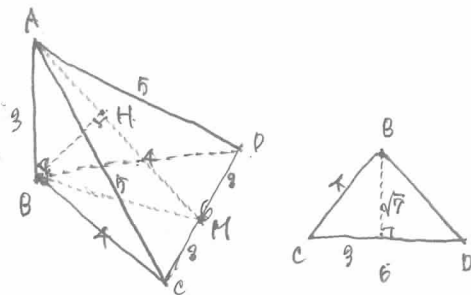


高3数学B 27. 図形と計量

[1]

(1)



$\triangle BCD$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

(2) 三平方の定理の逆より

$$\angle ABC = \angle ABD = 90^\circ$$

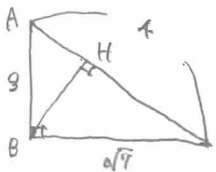
よって

$AB \perp$ 平面 BCD

四面体 $ABCD$ の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{7} \times 9 = 9\sqrt{7}$$

(3)



$\triangle ACD$ は二等辺
三角形より
 $\angle AMC = 90^\circ$
 $AM = 4$

$\triangle ABM \sim \triangle BHM$ より

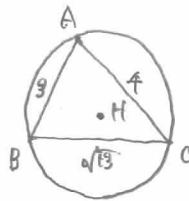
$$BH = \frac{\sqrt{7}}{4} \times 9 = \frac{9}{4}\sqrt{7}$$

<point>

- ① 高さ (ある平面に対し垂直にある辺)
を見つける

[2]

$DA = DB = DC$ より H は $\triangle ABC$ の外心である



余弦定理より

$$(\sqrt{13})^2 = 9^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \cos A$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{2} \quad \therefore A = 60^\circ \quad \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

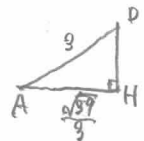
$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると

正弦定理より

$$2R = \frac{\sqrt{13}}{\sin A} = \frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{39}}{3}$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{39}}{3}$$

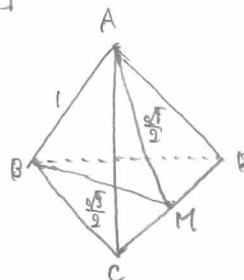
$$DH = \sqrt{9^2 - \left(\frac{\sqrt{39}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$



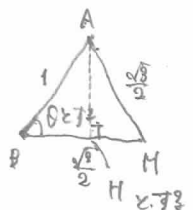
四面体 $ABCD$ の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \text{ の面積} \times DH \\ = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 9 \times 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{42}}{3} \\ = \sqrt{14}$$

[3]



とおく



余弦定理より

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$AH = AB \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

[別解] 面積を利用, H は $\triangle BCD$ の
四面体 $ABCD$ の体積 V は $\triangle BCD$ の面積 $\times AH$ を利用

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \triangle BCD \text{ の面積} \times AH \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 60^\circ \times \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

球の半径を

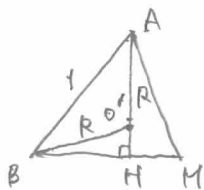
球の中心を O とする $\checkmark$ r とすると

四面体 $ABCD =$ 四面体 $OABC +$ 四面体 $OACD$
 $+ \text{四面体 } OADB + \text{四面体 } OBCD$ より

$$\frac{\sqrt{2}}{12} = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 60^\circ \times r$$

$$\frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3} r$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$



外接球の半径を R
 とする (中心を O' と
 す) (O と O' は一致)

$$BH = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \leftarrow BH = AB \cos \theta$$

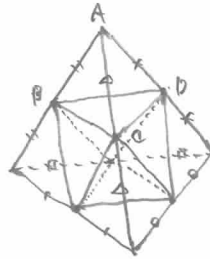
$\triangle BHA$ で三平方の定理より

$$R^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - R\right)^2$$

$$R^2 = \frac{1}{3} + \frac{3}{9} - \frac{2\sqrt{6}}{3} R + R^2$$

$$\therefore R = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

4



正八面体は図のように正四面体に
 うめこめる。

正四面体 $ABCD$ の体積を 1 とすると

うめこめた正八面体の体積

$=$ 大きい正四面体の体積

$= 4 \times$ 正四面体 $ABCD$ の体積

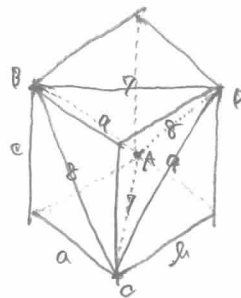
$$= 2^3 - 4 \times 1 = 4$$

よって $\frac{1}{4}$ 倍

5

斜四面体は直方体にうめこめる

直方体の各辺の長さを a, b, c とおく



$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 49 \dots ① \\ b^2 + c^2 = 81 \dots ② \\ c^2 + a^2 = 64 \dots ③ \end{cases}$$

$$① + ② + ③ \text{ より } a^2 + b^2 + c^2 = 97 \dots ④$$

$$① \sim ④ \text{ より } a = 4, b = \sqrt{33}, c = 4\sqrt{3}$$

四面体 $ABCD$ の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= 4 \cdot \sqrt{33} \cdot 4\sqrt{3} - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{33} \cdot 4\sqrt{3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{33} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{16\sqrt{11}}{3} \end{aligned}$$

[別解], 半径, ベクトル (図例)

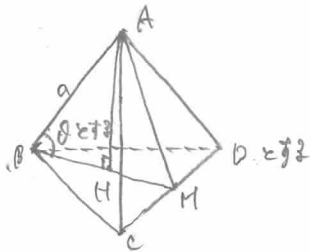
<point>

① すべての面が合同である四面体を
等面四面体という

② 等面四面体は直方体にうめこめる

[6]

① 正四面体の1辺の長さを a とする



正四面体 ABCD の体積を V とすると
図と同様にして

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

内接球の中心を O とすると

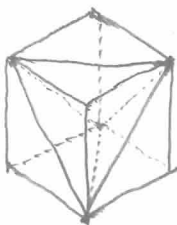
$$V = \text{四面体 } OABC \text{ の体積} \\ + \text{四面体 } OACD \text{ の体積} + \text{四面体 } OABD \text{ の体積} \\ + \text{四面体 } OBCD \text{ の体積}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ \cdot r$$

$$\frac{\sqrt{2}}{12} a = \frac{\sqrt{3}}{2} r \quad (a \neq 0)$$

$$\therefore a = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \boxed{2\sqrt{6}}$$

② 正四面体は等面四面体より
直方体にうめこめる

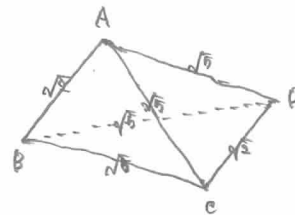


球が正四面体のすべての面に接する
とき、図の立方体のすべての面に接する
から球は立方体に内接している。

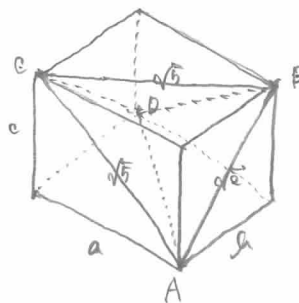
立方体の1辺の長さが 2 より

正四面体の1辺の長さは $\boxed{2\sqrt{6}}$

[7]



四面体 ABCD は等面四面体より
直方体にうめこめる



四面体 ABCD に外接する球に
図の直方体は内接する

r は直方体の対角線の長さの半分である
図のように a, b, c とおく

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \dots ① \\ b^2 + c^2 = 2 \dots ② \\ c^2 + a^2 = 5 \dots ③ \end{cases}$$

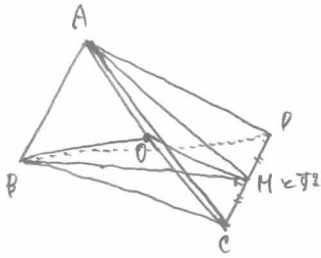
$$① + ② + ③ \text{ より } a^2 + b^2 + c^2 = 6 \dots ④$$

$$① \sim ④ \text{ より } a = 2, b = 1, c = 1$$

よって

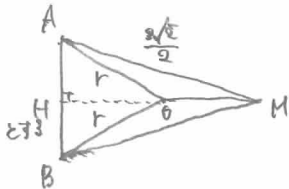
$$r = \frac{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

[別解] 正交法.



外接球の中心をOとする

$$AM = BM = \sqrt{\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$



$$MH = \sqrt{\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2$$

$$OM = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \quad (\triangle OCH \text{で三平方})$$

$$= \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}$$

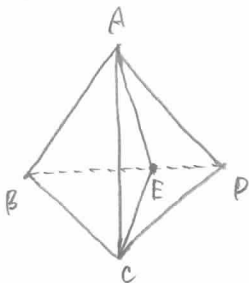
$$\text{また } OM = MH - OH \text{ より}$$

$$\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}$$

$$r^2 - \frac{1}{2} = 1$$

$$r^2 = \frac{3}{2} \quad \therefore r = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

[8]



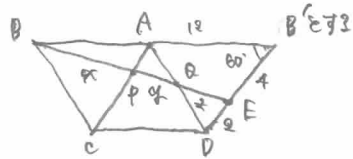
四面体 ABCP の体積 V は

$$V = \frac{9}{9} \times \text{四面体 ABCP の体積}$$

$$= \frac{9}{9} \times \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 6^3$$

$$= \boxed{12\sqrt{2}}$$

展開図を考えて



図のように、B, P, Q, E が一直線上にあるとき

$x + y + z$ は最小

このとき $\triangle PEB'$ で余弦定理より

$$BE^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 112$$

$$\therefore BE = 4\sqrt{7}$$

よって $x + y + z$ の最小値は $\boxed{4\sqrt{7}}$

5. 追記.

<point>

空間図形を考えるときの道具

初等幾何 対称性あり
三角比
座標
ベクトル 対称性なし

本問は対称性があまりないので

座標かベクトルを利用

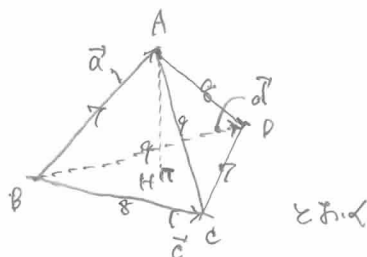
座標(頂点を座標でおく)か有知なの

は直角を含む面があるとき

本問はそれがないのでベクトルを

利用する

[別解] 正三角法(面積)



Hは平面BCD上にあるから

$$\vec{BH} = s\vec{c} + t\vec{d} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

とおける

$$\begin{aligned} \vec{AH} &= -\vec{a} + \vec{BH} \\ &= -\vec{a} + s\vec{c} + t\vec{d} \end{aligned}$$

$AH \perp BC$ より

$$\begin{aligned} \vec{AH} \cdot \vec{BC} &= (-\vec{a} + s\vec{c} + t\vec{d}) \cdot \vec{c} \\ &= -\vec{a} \cdot \vec{c} + s|\vec{c}|^2 + t\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \end{aligned}$$

$AH \perp BD$ より

$$\begin{aligned} \vec{AH} \cdot \vec{BD} &= (-\vec{a} + s\vec{c} + t\vec{d}) \cdot \vec{d} \\ &= -\vec{a} \cdot \vec{d} + s\vec{c} \cdot \vec{d} + t|\vec{d}|^2 = 0 \end{aligned}$$

ここで

$$|\vec{CA}|^2 = |\vec{a} - \vec{c}|^2$$

$$81 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2$$

$$81 = 49 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 16 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{c} = 16$$

$$\text{同様に } \vec{a} \cdot \vec{d} = 39, \vec{c} \cdot \vec{d} = 48. \text{ より}$$

$$\begin{cases} 64s + 48t = 16 \rightarrow 4s + 3t = 1 \dots ① \\ 48s + 81t = 39 \rightarrow 16s + 27t = 11 \dots ② \end{cases}$$

①, ②より

$$s = -\frac{1}{10}, t = \frac{7}{15}$$

よって

$$\begin{aligned} |\vec{AH}|^2 &= |-\vec{a} - \frac{1}{10}\vec{c} + \frac{7}{15}\vec{d}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + \frac{1}{100}|\vec{c}|^2 + \frac{49}{225}|\vec{d}|^2 \\ &\quad + \frac{1}{5}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{7}{75}\vec{c} \cdot \vec{d} - \frac{16}{15}\vec{a} \cdot \vec{d} \\ &= 49 + \frac{16}{100} + \frac{49}{225} \cdot 81 + \frac{16}{5} - \frac{7}{75} \cdot 48 \cdot 16 \\ &\quad - \frac{14}{15} \cdot 39 \cdot 11 \\ &= \frac{49 \cdot 25 + 16 + 49 \cdot 9 + 16 \cdot 5 - 7 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 55}{25} \\ &= \frac{49 \cdot 24 + 14 \cdot 56 - 2}{25} = \frac{2440}{25} \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{AH}| = \frac{4\sqrt{55}}{5}$$

$\triangle BCD$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{c}|^2 |\vec{d}|^2 - (\vec{c} \cdot \vec{d})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{7^2 \cdot 48^2 - 48^2} = \frac{1}{2} \sqrt{24 \cdot 120} = 12\sqrt{5} \end{aligned}$$

四面体 $ABCD$ の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{5} \cdot \frac{4\sqrt{55}}{5} = 16\sqrt{11}$$