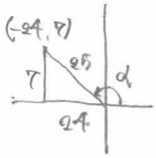
高3 数学β 28. 三角関数

$\boxed{1}$

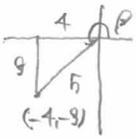
$\sin\alpha=\dfrac{7}{25}$，αは第2象限の角より

$\cos\alpha=-\dfrac{24}{25}$



$\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$，βは第3象限の角より

$\sin\beta=-\dfrac{3}{5}$



$\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta$

$=2\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{24}{25}$

$\cos 2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\beta$

$=\dfrac{16}{25}-\dfrac{9}{25}=\dfrac{7}{25}$

$\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha\cos 2\beta+\cos\alpha\sin 2\beta$

$=\dfrac{7}{25}\cdot\dfrac{7}{25}+\left(-\dfrac{24}{25}\right)\cdot\dfrac{24}{25}<0$

$\cos(\alpha+2\beta)=\cos\alpha\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta$

$=\left(-\dfrac{24}{25}\right)\cdot\dfrac{7}{25}-\dfrac{7}{25}\cdot\dfrac{24}{25}<0$

よって$\alpha+2\beta$は第3象限の角 //

$\boxed{2}$

$\sin\alpha$，$\sin\beta$を2解とする2次方程式の1つは

$t^2-(\sin\alpha+\sin\beta)t+\sin\alpha\sin\beta=0$

$t^2-\dfrac{5}{6}t+\dfrac{1}{6}=0$

$6t^2-5t+1=0$

$(2t-1)(3t-1)=0$ $\therefore t=\dfrac{1}{2}，\dfrac{1}{3}$

$\therefore(\sin\alpha,\sin\beta)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)，\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$

i) $(\sin\alpha,\sin\beta)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$のとき

$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，$0^\circ<\alpha<90^\circ$より $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\beta=\dfrac{1}{3}$，$90^\circ<\beta<180^\circ$より $\cos\beta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$

ii) $(\sin\alpha,\sin\beta)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$のとき

同様に $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

i)，ii)より

$\sin(\alpha+\beta)=\pm\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$ //

$\boxed{3}$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$より

$(\sin\alpha+\sin\beta)^2=\dfrac{1}{5}$

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\dfrac{1}{5}$ …①

$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$より

$(\cos\alpha+\cos\beta)^2=\dfrac{4}{5}$

$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\dfrac{4}{5}$ …②

①+②より

$2+2\cos(\alpha-\beta)=1$

$\therefore\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{1}{2}$ //

$\boxed{4}$

$\tan(x+y) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ より

$$\frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$\frac{\cancel{1+\sqrt{3}}}{1-\tan x \tan y} = \frac{\cancel{1+\sqrt{3}}}{1-\sqrt{3}}$$

$\therefore \tan x \tan y = \sqrt{3}$

$\tan x, \tan y$ を2解とする2次方程式の1つは

$$t^2 - (\tan x + \tan y)t + \tan x \tan y = 0$$

$$t^2 - (1+\sqrt{3})t + \sqrt{3} = 0$$

$$(t-1)(t-\sqrt{3}) = 0 \quad \therefore t = 1, \sqrt{3}$$

$\therefore (\tan x, \tan y) = (1, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, 1)$

$0 < x, y < \dfrac{\pi}{2}$ より

$$(x, y) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right) \text{〃}$$

$\boxed{5}$

解と係数の関係より

$$\tan\alpha + \tan\beta = 3$$

$$\tan\alpha \tan\beta = -1$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2} \text{〃}$$

$\boxed{6} \to \boxed{17}$

(1) $2\cos\dfrac{2}{5}\pi - 2\cos\dfrac{\pi}{5} + 1 = 0$

$$2\left(2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1\right) - 2\cos\frac{\pi}{5} + 1 = 0$$

↖2倍角

$$4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - 1 = 0$$

解の公式と $\cos\dfrac{\pi}{5} > 0$ より

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{〃}$$

(2) $2\cos\dfrac{2}{5}\pi - 2\cos\dfrac{\pi}{5} + 1 = 0$ より

$$\cos\frac{2}{5}\pi = \cos\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}$$

$$= \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{2\pi}{5}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{\{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)\}^2}{4^4}$$

$$= \frac{4^2}{4^4} = \frac{1}{16} \text{〃}$$

$\boxed{17} \to \boxed{6}$

(1) $\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta)$

$$= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos^2\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta$$

$$= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta$$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

サンシャインひいてよかせが身にしみる

(2) $\sin\dfrac{2\pi}{5} = \sin\dfrac{3\pi}{5}$ ← $\sin\dfrac{3}{5}\pi = \sin\left(\pi - \dfrac{2\pi}{5}\right) = \sin\dfrac{2\pi}{5}$

$$2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} = 3\sin\frac{\pi}{5} - 4\sin^3\frac{\pi}{5}$$

$\sin\dfrac{\pi}{5} \neq 0$ より

$$2\cos\frac{\pi}{5} = 3 - 4\sin^2\frac{\pi}{5}$$

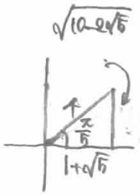
$$2\cos\frac{\pi}{5} = 3 - 4\left(1-\cos^2\frac{\pi}{5}\right)$$

$$4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - 1 = 0$$

解の公式と $\cos\frac{\pi}{5}>0$ より

$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ //

$\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ //



(3) $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}$

$=\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}$

$=\sin^2\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5}$

$=4\sin^4\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5}$ ← 2倍角

$=4\cdot\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$

$=\cancel{4}\cdot\frac{(10-2\sqrt{5})^2(6+2\sqrt{5})}{4^{\cancel{6}5}}$

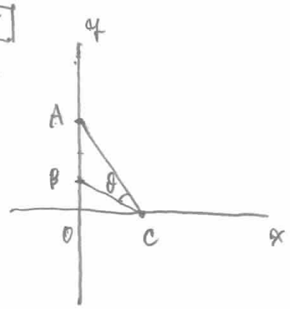
$=\frac{(5-\sqrt{5})^2(3+\sqrt{5})}{4^3\cdot 2}$

$=\frac{(30-10\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4^3\cdot 2}$

$=\frac{\cancel{10}^{5}(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4^3\cdot\cancel{2}}=\frac{5}{16}$ //

$\boxed{7}$

(1)



x軸正の向きと CA のなす角を α
　　　　　　　CB　　　　　　β

とすると

$\tan\alpha=\frac{-3}{c}$, $\tan\beta=\frac{-1}{c}$

$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)$

$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1+(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}=\frac{4}{7}$ //

(2) 同様に　　　　$c>0$ より相加相乗

$\tan\theta=\frac{\frac{2}{c}}{1+\frac{3}{c^2}}=\frac{2}{c+\frac{3}{c}}\leq\frac{2}{2\sqrt{c\cdot\frac{3}{c}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

等号成立は $c=\frac{3}{c}$ すなわち $c=\sqrt{3}$ のとき

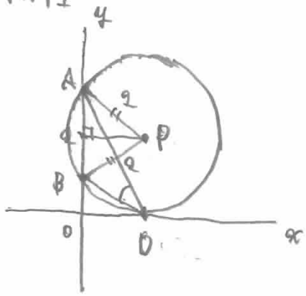
$\tan\theta>0$ より $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ← 上の式より

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ で $\tan\theta$ は単調増加より

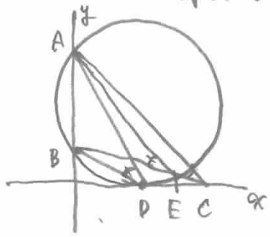
$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき θ は最大

このとき $\theta=\boxed{\frac{\pi}{6}}$, $c=\boxed{\sqrt{3}}$

[別解]



A, B を通り x軸に接する円を考える
この円の半径は AB の中点の y 座標に
等しいから 2 で中心の座標は $(\sqrt{3}, 2)$
図のようにこの円と x軸との接点を
D とおくと、D $(\sqrt{3}, 0)$



C が円外にあるとき
∠ACB=∠AEB−∠EAC
かつ ∠AEB=∠ADB より
C が D にあるとき
∠ACB は最大.

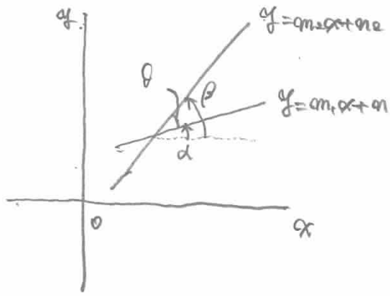
このとき

$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle APB = \boxed{\frac{\pi}{6}}$　円周角＝$\frac{1}{2}$×中心角

$c = \boxed{\sqrt{3}}$

〈point〉

① 2直線のなす角



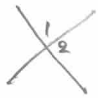
$\tan\alpha = m_1,\ \tan\beta = m_2$

2直線のなす角をθとすると

$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha)$　$(\theta \neq 90°)$

$= \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$

$= \dfrac{m_2 - m_1}{1-m_1m_2}$



ここで2直線のなす角は2つあることに注意して鋭角のθを得たければ

$\tan(180°-\theta) = -\tan\theta$ に注意して

$\tan\theta = \left|\dfrac{m_2-m_1}{1-m_1m_2}\right|$

とすればよい。

（$\tan\theta<0$ のとき θは鈍角で

$|\tan\theta| = -\tan\theta > 0$ を考えれば

$-\tan\theta = \tan(180°-\theta)$ で $180°-\theta$ は

鋭角なので2直線のなす角の

鋭角の方を求めることになる

8

$x^2+y^2=8$ 上の点 (x, y) は

$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos\theta \\ y = 2\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$

とおける

$xy = 8\sin\theta\cos\theta$

$= 4\sin 2\theta$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから $-1 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$ より

最大値 4　（$\sin 2\theta = 1$　$\therefore \theta = \frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$）

〈point〉

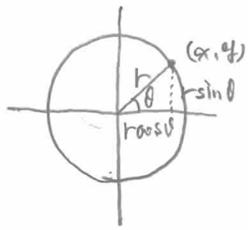
① 円の媒介変数表示

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (x, y) は

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$(0 \leqq \theta < 2\pi)$

とおける

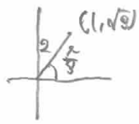


9

$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\theta \\ y = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおける

$\sqrt{3}x + y = \sqrt{2}(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)$

$= 2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$



$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから $-1 \leqq \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) \leqq 1$ より

最小値 $\boxed{-2\sqrt{2}}$

[別解]

$x^2+y^2=2$ から $y = \pm\sqrt{2-x^2}$ として y を消去、

線形計画法、実数条件、シュワルツの不等式などでもできる

$$x^2+2xy+3y^2$$

$$=2\cos^2\theta+4\cos\theta\sin\theta+6\sin^2\theta$$ 2倍角・半角

$$=2\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}+2\sin2\theta+\cancel{6}^{3}\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}$$

$$=2\sin2\theta-2\cos2\theta+4$$

$$=2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+4$$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから $-1\leqq\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$

より

最大値 $\boxed{2\sqrt{2}+4}$

[10]

(1) $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$$=\frac{2\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$ $\left(t=\tan\frac{\theta}{2}\right.$ より $\theta\neq(2k-1)\pi\ (k\in\mathbb{Z})\Big)$

$$=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$ ← $\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$

$$=\frac{2t}{1+t^2}$$ //

(2) $\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$=\frac{1-\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2}{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$ //

(3) $y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta+1}$

$$=\frac{\frac{2t}{1+t^2}-1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}$$

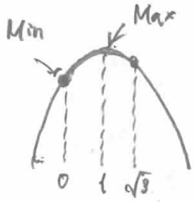
$$=\frac{2t-(1+t^2)}{1-t^2+(1+t^2)}=-\frac{1}{2}(t^2-2t+1)$$

(4) $0°\leqq\theta\leqq120°$ より

$0\leqq t\leqq\sqrt{3}$

$$y=-\frac{1}{2}(t^2-2t+1)$$

$$=-\frac{1}{2}(t-1)^2$$



$t=0$ のとき最小

最小値 $-\frac{1}{2}$

このとき

$\tan\frac{\theta}{2}=0$ $\quad\therefore\theta=0°$

$t=1$ のとき最大

最大値 0

このとき

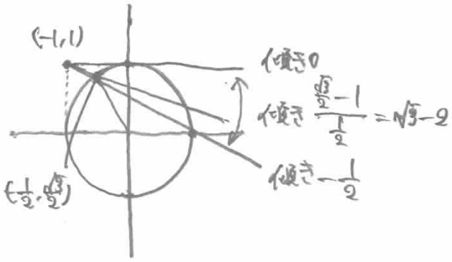
$\tan\frac{\theta}{2}=1$ $\quad\therefore\theta=90°$.

[別解] (3), (4)

$y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta+1}=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta-(-1)}$ は

$(-1,1)$ と半径1の円周上の点 $(\cos\theta,\sin\theta)$

を結ぶ直線の傾きを表す $(0°\leqq\theta\leqq120°)$

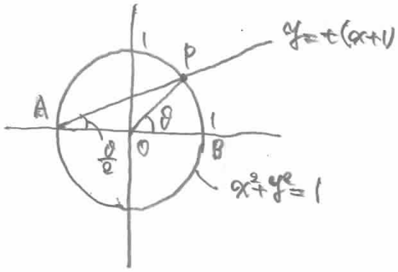


図より

$$\underset{\text{Min}}{-\frac{1}{2}}\leqq\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta-(-1)}\leqq\underset{\text{Max}}{0}$$

<point>

① 円の媒介変数表示2



Pを $x^2+y^2=1$ と $y=t(x+1)$ の $A(-1,0)$ 以外の交点とすると

$$x^2+t^2(x+1)^2=1$$

$$(t^2+1)x^2+2t^2x+t^2-1=0$$

$$(x+1)\{(t^2+1)x+(t^2-1)\}=0$$

$x\neq -1$ より

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2}$$

図のように $\angle BOP=\theta$ とおくと
$\angle BAP=\frac{\theta}{2}$

このとき $t=\tan\frac{\theta}{2}$

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

となる。

$\boxed{11}$

(1) $\sin\alpha+\sin\beta=$

$\alpha=A+B,\ \beta=A-B$ とおくと

$$A=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad B=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$=2\sin A\cos B$

$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 終.

(2) $\sin B+\sin C=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$=2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{B-C}{2}$ （$B+C=\frac{2\pi}{3}$ より）

$=\sqrt{3}\cos\frac{B-C}{2}$

$-\frac{2\pi}{3}<B-C<\frac{2\pi}{3}$ であるから

$$\frac{1}{2}<\cos\frac{B-C}{2}\leqq 1$$

よって

$$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin B+\sin C\leqq\sqrt{3}\ //$$

同様に

$\cos B+\cos C=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$=\cos\frac{B-C}{2}$

よって

$$\frac{1}{2}<\cos\frac{B-C}{2}\leqq 1\ //$$