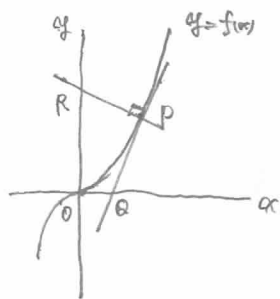


高3数学β 92. 微分法(1)

[1]



$$f(x) = x^2 \text{ とおく}$$

$$f'(x) = 2x$$

$y = f(x)$ の $P(t, t^2)$ ($t > 0$) における接線は

$$y - t^2 = f'(t)(x - t)$$

$$y - t^2 = 2t(x - t)$$

$$\therefore y = 2tx - 2t^2$$

Qは

$$2tx - 2t^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{2t}{2}$$

$$Q\left(\frac{2t}{2}, 0\right)$$

$y = f(x)$ の P における法線は

$$y - t^2 = -\frac{1}{f'(t)}(x - t)$$

$$y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2t}$$

$$R \text{ は } \left(0, t^2 + \frac{1}{2t}\right)$$

$$\frac{OR}{OQ} = \frac{t^2 + \frac{1}{2t}}{\frac{2t}{2}}$$

(相加平均不等式)

$$= \frac{2}{2} \left(t^2 + \frac{1}{2t}\right) \geq \frac{2}{2} \cdot 2\sqrt{t^2 \cdot \frac{1}{2t}} = \sqrt{2}$$

$$\text{等号成立は } t^2 = \frac{1}{2t} \text{ すなわち } t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

のとき

$$\therefore \text{最小値は } \sqrt{2}$$

[2]

$$f(x) = x - x^2$$

$$g(x) = x^2 + px + q \text{ とおく}$$

$$f'(x) = 1 - 2x$$

$$g'(x) = 2x + p$$

$y = f(x)$ の P における接線は

$$y = f'(t)(x + 1)$$

$$y = -2(x + 1) \quad \therefore y = -2x - 2$$

$y = f(x)$ とこの接線の交点

$$x - x^2 = -2x - 2$$

$$x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0 \quad (-1, 0), (2, -6)$$

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ は P で、交点接線をもちから

$$\begin{cases} f'(t) = g'(t) = 2 - 2t + p = -2 \quad \therefore 2p - 2 = 5 \quad \text{①} \\ g(t) = 0 = -1 + p - q + r = 0 \quad \therefore p - q + r = 1 \quad \text{②} \end{cases}$$

$y = g(x)$ は $(2, -6)$ を通るから

$$-6 = 4 + 4p + 2q + r \quad \therefore 4p + 2q + r = -14 \quad \text{③}$$

①~③より

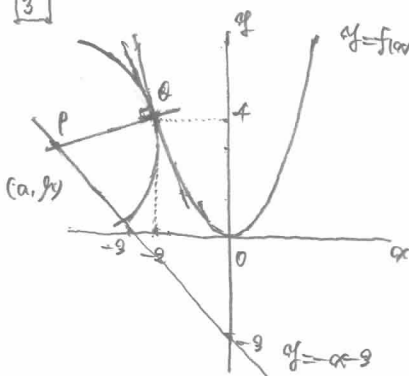
$$p = 0, q = -5, r = -4$$

(point)

① 交点接線

(2) 法線接線

[3]



$$f(x) = x^2 \text{ とおく}$$

$$f'(x) = 2x$$

Q における交点接線は

$$y - 4 = f'(2)(x + 2)$$

$$y - 4 = 4(x + 2) \quad \therefore y = 4x + 4$$

$y=f(x)$ の点 $(-2, 4)$ における法線は

$$y-4 = -\frac{1}{f'(-2)}(x+2)$$

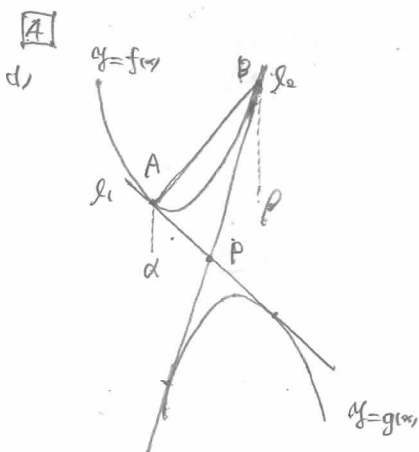
$$y-4 = \frac{1}{4}(x+2) \therefore y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$$

P はこの直線と $y = -x-3$ の交点より

$$\frac{1}{4}x + \frac{9}{2} = -x-3 \quad \leftarrow \text{両辺に4を乗じる}$$

$$\frac{5}{4}x = -\frac{15}{2} \therefore x = -6$$

$$\therefore a = -6, b = 3 //$$



$$f(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = -(x-t)^2 + t \quad \text{と、おこ}$$

$$= -x^2 + 2tx - t^2 + t$$

$$f'(x) = 2x \quad g'(x) = -2x + 2t$$

l_1 は

$$y - (a^2 + 1) = f'(a)(x - a)$$

$$y - (a^2 + 1) = 2a(x - a)$$

$$\therefore y = 2ax - a^2 + 1$$

l_2 は

$$y = 2\beta x - \beta^2 + 1$$

P はこれら2直線の交点より

$$2ax - a^2 + 1 = 2\beta x - \beta^2 + 1$$

$$2(a-\beta)x = a^2 - \beta^2$$

$$2(a-\beta)x = (a-\beta)(a+\beta)$$

$$\therefore x = \frac{a+\beta}{2}$$

$$y = 2a \cdot \frac{a+\beta}{2} - a^2 + 1 = a\beta + 1$$

$$\therefore P \text{ は } \left(\frac{a+\beta}{2}, a\beta + 1 \right) //$$

③

$$\overrightarrow{PA} = \left(a - \frac{a+\beta}{2}, a^2 + 1 - (a\beta + 1) \right) = \left(\frac{a-\beta}{2}, a^2 - a\beta \right)$$

$$\overrightarrow{PB} = \left(\beta - \frac{a+\beta}{2}, \beta^2 + 1 - (a\beta + 1) \right) = \left(\frac{\beta-a}{2}, \beta^2 - a\beta \right) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \text{Scw} &= \frac{1}{2} \left| \frac{a-\beta}{2} (\beta^2 - a\beta) + \frac{a-\beta}{2} (a^2 - a\beta) \right| \\ &= \frac{1}{4} | (a-\beta) (a^2 - 2a\beta + \beta^2) | \\ &= \frac{1}{4} | a - \beta |^3 \end{aligned}$$

$\therefore \tau, y = g(x)$ の $x = \beta$ における接線は

$$y - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta)$$

$$y - (-\beta^2 + 2t\beta - t^2 + t) = (-2\beta + 2t)(x - \beta)$$

$$y = (-2\beta + 2t)x + \beta^2 - t^2 + t$$

これと $y = f(x)$ に接するとき

$$x^2 + 1 = (-2\beta + 2t)x + \beta^2 - t^2 + t$$

$$x^2 + 2(\beta - t)x - \beta^2 + t^2 - t + 1 = 0$$

P が重根をもつため、 Δ から判別式を P とし

$$\frac{b^2}{4} = (\beta - t)^2 - (-\beta^2 + t^2 - t + 1)$$

$$= 2\beta^2 - 2t\beta + t - 1 = 0 \dots \textcircled{1}$$

$\therefore \textcircled{1}$ の解が a, β とあるから

1行と係数との関係より

$$\begin{cases} a + \beta = t \\ a\beta = \frac{t-1}{2} \end{cases}$$

$\therefore \tau$

$$\text{Scw} = \frac{1}{4} | (a-\beta) |^3$$

$$= \frac{1}{4} | (a-\beta) |^3$$

$$= \frac{1}{4} | (a+\beta)^2 - 4a\beta |^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} (t^2 - 2t + 2)^{\frac{3}{2}} //$$

③ ①の異なる2実解をもつとき

両方に接する2本の接線が存在する

判別式をDとして

$$\frac{D}{4} = t^2 - 2(t-1)$$

$$= t^2 - 2t + 2$$

$$= (t-1)^2 + 1 > 0$$

よってtは実数全体

$$D(t) = \frac{1}{4} \{(t-1)^2 + 1\}^{\frac{3}{2}}$$

t=1のとき最小で最小値 $\frac{1}{4}$

<point>

① 共通接線2

(2曲線が離れている)

解法は主に3つ、2次関数かあるか、
どうかで考える

① ともに2次関数でない

両方の接線の方程を立てて

それら一致

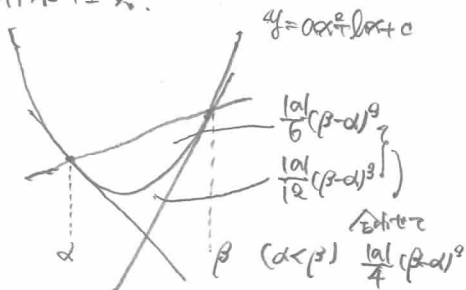
② 片方が2次関数

2次関数でない方で接線の方程
式を立てて、それが2次関数に接
するとして判別式

③ 両方が2次関数

①: ②どちらの方法でも解ける

② 有る性質



[5]

$$f(x) = 2x^2 + 9x + 6x - 1$$

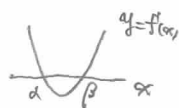
$$f'(x) = 6x + 18x + 6$$

$$f'(x) = 0 \text{ とする } \alpha, \beta$$

$$6x^2 + 18x + 6 = 0$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} = \alpha, \beta \quad (\alpha < \beta) \text{ とおく}$$

x	α	β
f'(x)	0	0
f''(x)	+	+



$$x = \beta = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \text{ のとき最小値をとる}$$

$$x = \beta \text{ は } \textcircled{1} \text{ の } x \text{ より } \beta^2 + 3\beta + 1 = 0$$

$$f(x) = (x^2 + 3x + 1)(2x + 3) - 5x - 4$$

$$x = \beta \text{ のとき最小値は}$$

$$f(\beta) = (\beta^2 + 3\beta + 1)(2\beta + 3) - 5\beta - 4$$

$$= -5\beta - 4$$

$$= -5 \cdot \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} - 4$$

$$= \frac{7 - 5\sqrt{5}}{2}$$

<point>

$$\textcircled{1} \alpha \text{ の値は } \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (b^2 - 4ac \neq \text{平方数})$$

のときの最小値の求め方

[6]

$$f(x) = x^2 + 3ax^2 + 15x$$

$$f'(x) = 2x + 6ax + 15$$

$$f'(x) = 0 \text{ の異なる2実解をもてはよいか}$$

$$3x^2 + 6ax + 15 = 0$$

$$x^2 + 2ax + 5 = 0 \quad \textcircled{1}$$

判別式をDとして

$$\frac{D}{4} = a^2 - 5 > 0$$

$$\therefore a < -\sqrt{5}, a > \sqrt{5}$$

解と係数の関係より
 $\alpha + \beta = -2a$

② ①の2解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると
 3次関数の点対称性より

$$\begin{aligned}\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} &= f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \\ f(\alpha) + f(\beta) &= 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \\ &= 2f(-a) \\ &= 2(2a^3 + 15a) \\ &= 4a^3 + 30a\end{aligned}$$

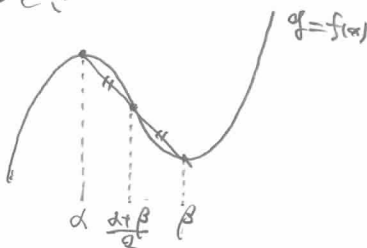
③ $4a^3 + 30a = -18$ $\begin{array}{ccccccc} -3 & 2 & 0 & -15 & 9 \\ & -6 & 18 & -9 & \end{array}$

$$\begin{aligned}2a^3 + 15a + 9 &= 0 \\ (a+3)(2a^2 - 6a + 9) &= 0 \\ \therefore a &= -3, \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \\ a < -\sqrt{3}, a > \sqrt{3} &\text{より} \\ a &= -3, \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \quad "$$

<point>

① 極値の和

3次関数 $f(x)$ の極大値と極小値をもとに



3次関数の対称性より

$$\begin{aligned}\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} &= f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \\ f(\alpha) + f(\beta) &= 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \\ &\text{極値の和}\end{aligned}$$

[別解]

④ $f(\alpha) + f(\beta) = (2\alpha^2 + 9\alpha)(2\beta^2 + 9\beta) + 15(\alpha + \beta)$
 点対称性の関係より

[7]

$$f(x) = 2x^2 + 9x - 9$$

$$f'(x) = 4x + 9$$

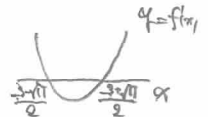
$$f'(x) = 0 \text{ とする } \Rightarrow x = -\frac{9}{4}$$

$$6x^2 + 18x - 9 = 0$$

$$2x^2 + 6x - 3 = 0 \quad \therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}$$

この2点が α, β である

x	$\frac{3-\sqrt{11}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{11}}{2}$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	極大	極小



$$\therefore \alpha = \frac{3-\sqrt{11}}{2}, \beta = \frac{3+\sqrt{11}}{2}$$

$$\therefore \beta - \alpha = \sqrt{11}$$

$$M - m = f(\alpha) - f(\beta)$$

$$= \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx$$

$$= \int_{\beta}^{\alpha} (4x + 9) dx \quad \left\{ \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx = - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx \right.$$

$$= -6 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \quad \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = - \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 \right.$$

$$= (-6) \cdot \left\{ -\frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 \right\} = (\beta - \alpha)^3$$

$$= (\sqrt{11})^3$$

$$= \boxed{11\sqrt{11}}$$

<point>

② 極値の差

$f(x)$ の $x = \alpha, \beta$ で極値をとるとき

$$f(\alpha) - f(\beta) = \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx \quad \leftarrow f'(x) \text{ は } f(x) \text{ の導関数}$$

注

極値の和は点対称な曲線の場合のみ有効。差はいつでも使える。3次関数のときは $\frac{1}{6}$ が入ってくるので有効。

[8]

$$d) f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3mx$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6mx + 3m$$

$f'(x) = 0$ かつ異なる2解をもてほしいから

$$3x^2 - 6mx + 3m = 0$$

$$x^2 - 2mx + m = 0 \dots ①$$

判別式を D として

$$D/4 = m^2 - m > 0$$

$$m(m-1) > 0$$

$$\therefore m < 0, m > 1$$

e) ①の2解が α, β である 解と係数の関係

$$f(\alpha) - f(\beta) = \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx \quad \begin{matrix} \alpha + \beta = 2m \\ \alpha\beta = m \end{matrix}$$

$$= \int_{\beta}^{\alpha} (3x^2 - 6mx + 3m) dx$$

$$= -9 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= \frac{1}{2} (\beta - \alpha)^3$$

$$= \frac{1}{2} \{(\beta - \alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} (4m^2 - 4m)^{\frac{3}{2}} = 8\sqrt{2}$$

$$(4m^2 - 4m)^{\frac{3}{2}} = 16\sqrt{2} \ll 2^{\frac{9}{2}}$$

$$4m^2 - 4m = 8$$

$$m^2 - m - 2 = 0$$

$$(m+1)(m-2) = 0$$

$$m < 0, m > 1 \text{ より } m = -1, 2$$

[9]

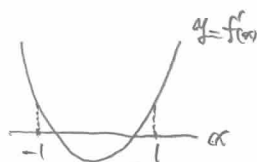
$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$f'(x) = 0$ かつ $-1 \leq x \leq 1$ で異なる2解

をもてほしい

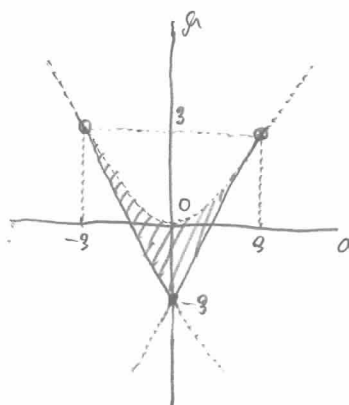
$f'(x) = 0$ の判別式を D として



$$\begin{cases} D/4 > 0: a^2 - 9b > 0 & \therefore b < \frac{a^2}{9} \\ -1 < -\frac{a}{3} < 1 & \therefore -3 < a < 3 \end{cases}$$

$$f'(-1) \geq 0: 3 - 2a + b \geq 0 \quad \therefore b \geq 2a - 3$$

$$f'(1) \geq 0: 3 + 2a + b \geq 0 \quad \therefore b \geq -2a - 3$$



求める範囲は図の斜線部

ただし境界は

実線、黒丸は含み

破線、白丸は除く //