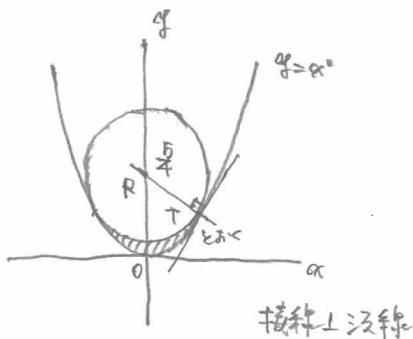


高3数学B 97.積分法②

①

d)



$$f(x) = x^2 \text{ と } g(x)$$

$$f'(x) = 2x \quad (x \neq 0)$$

$y = f(x)$ の $x = t$ における法線は

$$y - f(t) = -\frac{1}{f'(t)}(x - t)$$

$$y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2t}x + t + \frac{1}{2}$$

これが $(0, \frac{5}{4})$ を通るとき

$$\frac{5}{4} = t^2 + \frac{1}{2}$$

$$t^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore t = \pm \frac{\sqrt{9}}{2}$$

よって接点には

$$(\pm \frac{\sqrt{9}}{2}, \frac{9}{4}) //$$

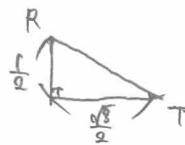
注.

$x^2 + (y - \frac{5}{4})^2 = 1^2$ と $y = x^2$ が接するから x を消去して

$y + (y - \frac{5}{4})^2 - 1^2 = 0$ の正の虚根をとるとき t ともよいが、放物線と円が接する上、2点以上多数あり、これらが虚根で求まるわけではない



②



$$RT = 1$$

C の方程式は

$$x^2 + (y - \frac{5}{4})^2 = 1$$

③



$$= \frac{1}{2} \times (\frac{5}{4} + \frac{9}{4}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{9} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 dx$$

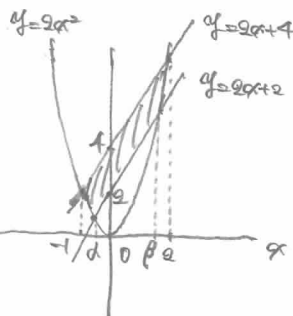
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - [\frac{x^3}{3}]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{9}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$$

よって求める面積は

$$2(\frac{9}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}) = \frac{9}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} //$$

④



$y = 2x^2$ と $y = 2x + 2$ の交点

$$2x^2 = 2x + 2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

この2解を α, β ($\alpha < \beta$) とする

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1$$

$y=2x^2$ と $y=2x+4$ の交点とは

$$2x^2=2x+4$$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x=-1, 2$$

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{(2x+4)-2x^2\} dx - \int_2^{\beta} \{(2x+2)-2x^2\} dx \quad (2) \\ &= -2 \int_{-1}^2 (x+1)(x-2) dx + 2 \int_2^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} \{2-(-1)\}^3 - 2 \cdot \frac{1}{6} (\beta-\alpha)^3 \\ &= 9 - \frac{1}{3} \{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}} + \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= 9 - \frac{1}{3} \{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{6} (\beta-\alpha)^3 \\ &= 9 - \frac{1}{3} \cdot 5^{\frac{3}{2}} \\ &= 9 - \frac{5\sqrt{5}}{3} \quad // \end{aligned}$$

[3]

d) f は

$$y-5=am(x-1)$$

$$\therefore y=amx-am+5$$

C と f の交点とは

$$2x^2=amx-am+5$$

$$2x^2-amx+am-5=0 \quad \dots (1)$$

判別式を D として

$$D=am^2-8(am-5)$$

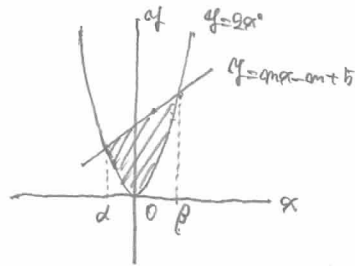
$$=am^2-8am+40$$

$$=(am-4)^2+24 \geq 0$$

よって (1) は異なる 2 実解をもつから

C と f は異なる 2 点で交わる

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2 dx - (\beta-\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha) dx \\ &= \left[\frac{(x-\alpha)^3}{3} \right]_{\alpha}^{\beta} - (\beta-\alpha) \left[\frac{(x-\alpha)^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^3}{3} - \frac{(\beta-\alpha)^3}{2} = -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6} \quad \square \end{aligned}$$



(1) の 2 解を α, β ($\alpha < \beta$) とおく

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\frac{am}{2}, \quad \alpha\beta=\frac{am-5}{2}$$

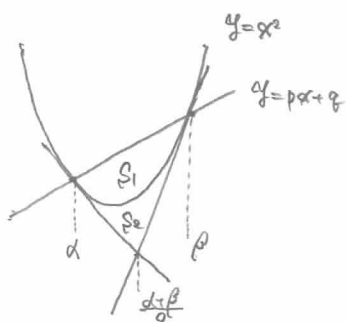
$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(amx-am+5)-2x^2\} dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= -2 \cdot \left\{ -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{am^2}{4} - 2(am-5) \right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{24} (am^2-8am+40)^{\frac{3}{2}} \quad // \\ (4) \quad &= \frac{1}{24} \{(am-4)^2+24\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$am=4$ のとき

このとき f は $y=4x+1$

4

d)



①と②の交点のx座標は

$$x^2 = px + q$$

$$x^2 - px - q = 0 \quad (D = p^2 + 4q > 0)$$

この2解が α, β である

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = p, \quad \alpha\beta = -q$$

$$S_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \{ (px+q) - x^2 \} dx$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 - px - q) dx$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) \{ (x - \alpha) - (\beta - \alpha) \} dx$$

$$= - \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) dx - (\beta - \alpha) \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) dx \right\}$$

$$= \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 \quad \text{H}$$

e) $f(x) = x^2$ とおく

$$f'(x) = 2x$$

$g = f(x)$ の A における接線は

$$g - \alpha^2 = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

$$g - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha)$$

$$\therefore g = 2\alpha x - \alpha^2$$

B における接線は

$$g = 2\beta x - \beta^2$$

これらの交点の x 座標は

$$2\alpha x - \alpha^2 = 2\beta x - \beta^2$$

$$2(\alpha - \beta)x = \alpha^2 - \beta^2$$

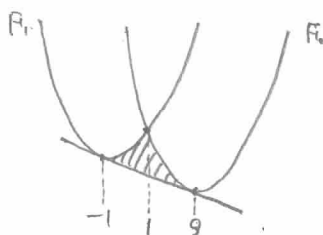
$$2(\alpha - \beta)x = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

$$\therefore x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \{ x^2 - (2\alpha x - \alpha^2) \} dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha} \{ x^2 - (2\beta x - \beta^2) \} dx \\ &= \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x - \alpha)^2 dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha} (x - \beta)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x - \alpha)^3}{3} \right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} + \left[\frac{(x - \beta)^3}{3} \right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{12} (\beta - \alpha)^3 \quad \text{H} \end{aligned}$$

$$S_1 = S_2 = Q = \frac{1}{12} \quad \text{H}$$

5



$$f_1(x) = x^2 + x + 2 \quad \text{とおく}$$

$$f_2(x) = 2x + 1$$

$g = f_1(x)$ の $x = t$ における接線は

$$g - f_1(t) = f_1'(t)(x - t)$$

$$g - (t^2 + t + 2) = (2t + 1)(x - t)$$

$$\therefore g = (2t + 1)x - t^2 + 2$$

これが f_2 にも接するとき

$$x^2 - 7x + 10 = (2t + 1)x - t^2 + 2$$

$$x^2 - 2(t + 4)x + t^2 + 8 = 0$$

が重解をもてはよいから判別式を D として

$$D/4 = (t + 4)^2 - (t^2 + 8)$$

$$= 8t + 8 = 0 \quad \therefore t = -1$$

このとき重解は $x = 9$ より

$$g = \boxed{x + 1} \quad \text{接線は}$$

f_2 とこの接線の接点の x 座標は $x = 9$

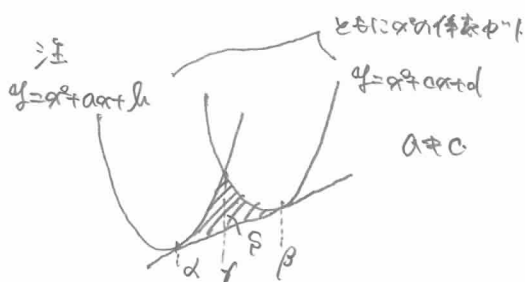
f_1 と f_2 の交点の x 座標は

$$x^2 + x + 2 = x^2 - 7x + 10$$

$$8x = 8 \quad \therefore x = 1$$

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \{x^2 + x + 2 - (x+1)\} dx \\ &\quad + \int_1^9 \{x^2 - 7x + 10 - (x+1)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 (x+1)^2 dx + \int_1^9 (x-9)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{(x-9)^3}{3} \right]_1^9 \\ &= \frac{2^3}{3} + \frac{2^3}{3} = \boxed{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$



$$S = \frac{1}{2} (\beta - \alpha)^3 \leftarrow \text{覚える必要はないが、知っておくと便利}$$

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ を示せばいいが、\text{[4] の意味} と$$

同様

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ を示す}$$

$y = x^2 + ax + h$ と $y = x^2 + cx + d$ の交点

$$x^2 + ax + h = x^2 + cx + d$$

$$(a-c)x = d-h$$

$$\therefore x = \frac{d-h}{a-c} = \gamma$$

交点接線を $y = ax + m$ とする

$y = x^2 + ax + h$ と $y = ax + m$ の交点

$$x^2 + ax + h = ax + m$$

$$x^2 + (a-a)x + h-m = 0$$

これから $x = \alpha$ と $x = \beta$ が求まる

$$x^2 + (a-a)x + h-m = (x-\alpha)^2$$

これから α と β の x で $\alpha = \beta$ となる

$$\begin{cases} a-m = -2\alpha \dots \text{①} \\ h-m = \alpha^2 \dots \text{②} \end{cases}$$

同様に

$$\begin{cases} c-m = -2\beta \dots \text{③} \\ d-m = \beta^2 \dots \text{④} \end{cases}$$

①-③ より

$$\alpha - \beta = -\frac{a-c}{2} \leftarrow m \text{ 消去}$$

②-④ より

$$\alpha^2 - \beta^2 = h-d$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = h-d$$

$$-\frac{a-c}{2} (\alpha + \beta) = h-d$$

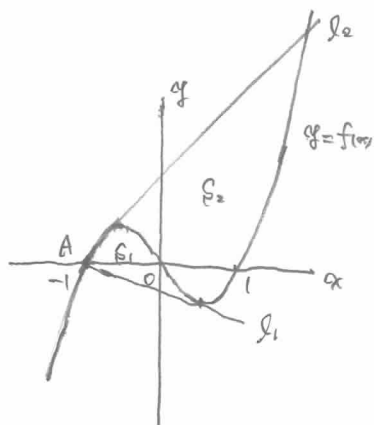
$$\alpha + \beta = 2 \cdot \frac{d-h}{a-c}$$

$$= 2\gamma$$

$$\therefore \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{H}$$

6

①



$$f(x) = x^2 - x \text{ とおく}$$

$$f(x) = 3x^2 - 1$$

点Aを通る直線とCの交点+2個であるときAを通る直線はCの接線である

$y = f(x)$ の $x = t$ における接線は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

$$y - (t^2 - t) = (3t^2 - 1)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 - 1)x - 2t^2$$

これから $(-1, 0)$ を通るとき

$$0 = -(3t^2 - 1) - 2t^2 \Rightarrow 5t^2 - 1 = 0$$

$$5t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(t+1)(2t^2+t-1) = 0 \Rightarrow t = -1, \frac{1}{2}$$

$$(t+1)^2(2t-1) = 0 \Rightarrow t = -1, \frac{1}{2}$$

$$t = -1 \text{ のとき } y = 2x + 2 \dots l_2$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ のとき } y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \dots l_1$$

Cと l_1 で囲まれた部分の面積 S_1 は

$$S_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left\{ (x^2 - x) - \left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \right) \right\} dx$$

$$= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \right) dx$$

$$= \frac{1}{12} \left\{ \frac{1}{2} - (-1) \right\}^4 = \frac{27}{64}$$

Cと l_2 の交点

$$x^2 - x = 2x + 2$$

$$x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$(x+1)^2(x-2) = 0 \leftarrow x = -1 \text{ は接点から } (x+1)^2 \text{ を因数分解して計算}$$

$$\therefore x = -1, 2$$

Cと l_2 で囲まれた部分の面積 S_2 は

$$S_2 = \int_{-1}^2 \{ (2x+2) - (x^2-x) \} dx$$

$$= - \int_{-1}^2 (x+1)^2(x-2) dx$$

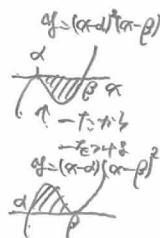
$$= \frac{1}{12} \{ 2 - (-1) \}^4 = \frac{27}{4}$$

注

$\alpha < \beta$ とする

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^0(x-\beta) dx = -\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^1(x-\beta) dx = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$$



注

この問題のような言設定のとき

$S_1 = S_2 = 1 : 16$ は 3 次方程式で表わし、常に

成立する $\uparrow 1^4 : 2^4$ (交点と接点のx座標+定数
1:2であることがわかる)

7

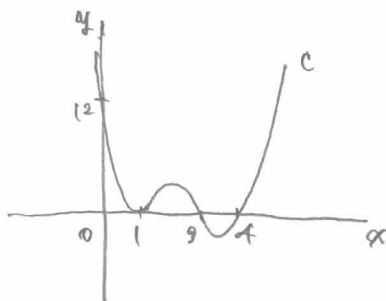
① Cとx軸との交点

$$x^2 - 9x^2 + 27x^2 - 9|x+2| = 0$$

$$(x-1)^2(x-9)(x-4) = 0$$

$$\therefore (1, 0), (9, 0), (4, 0)$$

Cとy軸との交点 $(0, 12)$



② 直線 PQ は y 軸に平行ではない
 ので $y = mx + n$ とおく

$\alpha = \alpha, \beta$ で接するとすると
 $(\alpha < \beta)$
 $\alpha^4 - 9\alpha^2 + 27\alpha^2 - 9|\alpha + 12 = m\alpha + n$
 $\alpha^4 - 9\alpha^2 + 27\alpha^2 - (m+9)\alpha - n + 12 = 0$

は

$$(\alpha - \alpha)^2(\alpha - \beta)^2 = 0$$

と表すことができるから

$$\begin{aligned} (\alpha - \alpha)^2(\alpha - \beta)^2 &= (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \\ &= \alpha^4 - 2(\alpha + \beta)\alpha^2 + (\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta)\alpha^2 \\ &\quad - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)\alpha + \alpha^2\beta^2 \quad \text{より} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -2(\alpha + \beta) = -9 \dots ① \\ \alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta = 27 \dots ② \\ 2\alpha\beta(\alpha + \beta) = m + 9 \dots ③ \\ \alpha^2\beta^2 = -m + 12 \dots ④ \end{cases}$$

①, ③ より $\alpha + \beta = \frac{9}{2}, \alpha\beta = \frac{27}{8}$

③ より

$$\frac{249}{8} = m + 9 \quad \therefore m = -\frac{5}{8}$$

④ より

$$\frac{729}{64} = -m + 12$$

$$\therefore m = \frac{39}{64}$$

$$\therefore \tau: y = -\frac{5}{8}x + \frac{39}{64} //$$

③ 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{ (\alpha^4 - 9\alpha^2 + 27\alpha^2 - 9|\alpha + 12) \\ &\quad - (-\frac{5}{8}\alpha + \frac{39}{64}) \} d\alpha \end{aligned}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha - \alpha)^2(\alpha - \beta)^2 d\alpha$$

$$= \frac{1}{90}(\beta - \alpha)^5$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{90} \{ (\beta - \alpha)^2 \}^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{1}{90} \{ (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \}^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{1}{90} \left(\frac{27}{4} \right)^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{1}{90} \cdot \frac{9^5 \cdot 9\sqrt{3}}{92} = \frac{729\sqrt{3}}{920} // \end{aligned}$$

注:

$$\alpha + \beta = \frac{9}{2}, \alpha\beta = \frac{27}{8} \text{ から}$$

α, β を 2 解とす 2 次方程式の 1 つは

$$t^2 - \frac{9}{2}t + \frac{27}{8} = 0$$

$$8t^2 - 36t + 27 = 0$$

$$\therefore t = \frac{18 \pm 6\sqrt{3}}{8} = \frac{9 \pm 3\sqrt{3}}{4} = \alpha, \beta \quad (\alpha < \beta)$$

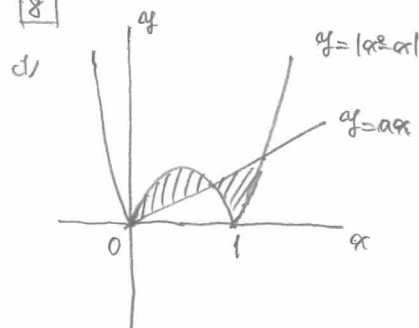
を求めて 3 解いてもよい $(\beta - \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2})$

注

$\alpha < \beta$ とす

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\alpha - \alpha)^2(\alpha - \beta)^2 d\alpha = \frac{1}{90}(\beta - \alpha)^5$$

⑧



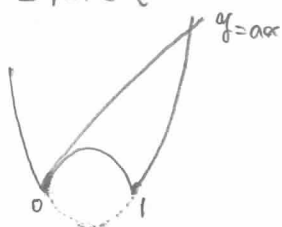
$$y = |x^2 - x|$$

$$= \begin{cases} x^2 - x & (x \leq 0, x \geq 1) \\ -x^2 + x & (0 < x < 1) \end{cases}$$

$$f(x) = -x^2 + x \text{ とおく}$$

$$f'(x) = -2x + 1 \quad f'(0) = 1$$

① $a \geq 1$ のとき



$y = |x^2 - x|$ と $y = ax$ の交点の x 座標は

$0 < x < 1$ のとき $x = 1/a$

$x \leq 0, x \geq 1$ のとき

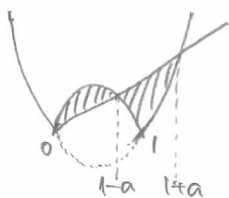
$$x^2 - x = ax$$

$$x^2 - (1+a)x = 0$$

$$x \{ x - (1+a) \} = 0 \quad \therefore x = 0, 1+a$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{1+a} \{ ax - (x^2 - x) \} dx \\ &= \int_0^{1+a} (-x^2 + 2x) dx \\ &= -\int_0^{1+a} x \{ x - (1+a) \} dx \\ &\quad + 2 \int_0^{1+a} x(x-1) dx \\ &= \frac{1}{6} (1+a)^3 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} a^3 + \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

② $0 < a < 1$ のとき



$y = |x^2 - x|$ と $y = ax$ の交点の x 座標は

$0 < x < 1$ のとき

$$-x^2 + x = ax$$

$$x^2 - (1-a)x = 0$$

$$x \{ x - (1-a) \} = 0 \quad \therefore x = 1-a$$

$x \leq 0, x \geq 1$ のとき $x = 0, 1+a$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{1-a} \{ (-x^2 + x) - ax \} dx + \int_{1-a}^{1+a} \{ a(x-1) - (x^2 - x) \} dx \\ &= \int_0^{1-a} \{ (-x^2 + x) - ax \} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} |a \cdot a(1-a) + a \cdot a(1+a)| \\ &= \frac{1}{6} (1-a)^3 + a^2 \\ &= -\frac{1}{6} a^3 + \frac{3}{2} a^2 - \frac{1}{2} a + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

③ $a \geq 1$ のとき S は a の関数

$0 < a < 1$ のとき

$$S = \frac{1}{6} (-a^3 + 9a^2 - 9a + 1)$$

$$S' = \frac{1}{6} (-3a^2 + 18a - 9)$$

$S' = 0$ とすると

$$-3a^2 + 18a - 9 = 0$$

$$a^2 - 6a + 1 = 0 \quad \therefore a = 3 - 2\sqrt{2}$$

a	0	$3-2\sqrt{2}$	1	1
S'		-	0	+
S		↘	極大	↗



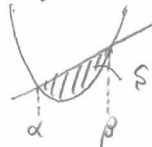
$\therefore a = 3 - 2\sqrt{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S_{\max} &= \frac{1}{6} \{ (a^2 - 6a + 1)(-a + 9) + (16a - 2) \} \\ &= \frac{1}{6} (16a - 2) \\ &= \frac{8}{3} (3 - 2\sqrt{2}) - \frac{1}{3} = \frac{23 - 16\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

注 ☆ について

放物線と直線が囲む面積は

$$y = ax^2 + bx + c$$



$$S = \frac{|a|}{6} (p - a)^2$$

$|x^2$ の係数と交点の x 座標の差に依存する

よって $|x^2$ の係数 = 1 で交点の x 座標の差が a より

$1-a$ (可) 面積である。

9

4) CとLの交点

$$x(x-9)^2 = qmx$$

$$x^3 - 6x^2 + (9-m)x$$

$$x \{ x^2 - 6x + (9-m) \} = 0$$

CとLが $x \geq 0$ で異なる3点で交わるためには

$$x^2 - 6x + (9-m) = 0 \dots ①$$

4-0より大きい異なる2解をもていふ

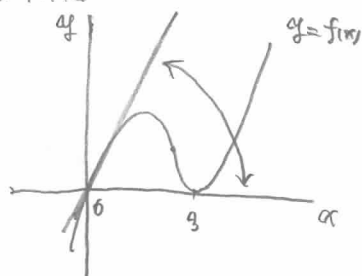
$$f(x) = x^2 - 6x + (9-m) \text{ とおく}$$

$f(x) = 0$ の判別式をDとして

$$\begin{cases} \frac{D}{4} = 9 - (9-m) > 0 & \therefore m > 0 \\ f(0) > 0 : 9-m > 0 & \therefore m < 9 \end{cases}$$

$$\therefore 0 < m < 9$$

[別解]



$$f(x) = x(x-9)^2 \text{ とおく}$$

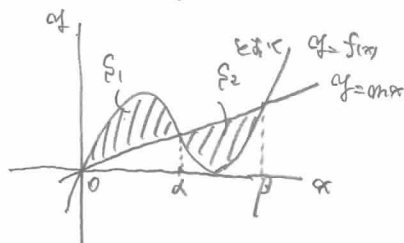
$$= x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(0) = 0$$

$$\therefore 0 < a < 9$$

② ①の2解を α, β とおく



$S_1 = S_2$ とするとき

$$\int_0^a (x^3 - 6x^2 + 9x - qmx) dx = \int_a^9 (qmx - (x^3 - 6x^2 + 9x)) dx$$

$$\int_0^a (x^3 - 6x^2 + (9-m)x) dx = - \int_a^9 (x^3 - 6x^2 + (9-m)x) dx$$

$$\int_0^a (x^3 - 6x^2 + (9-m)x) dx + \int_a^9 (x^3 - 6x^2 + (9-m)x) dx = 0$$

$$\int_0^9 (x^3 - 6x^2 + (9-m)x) dx = 0$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9-m}{2} x^2 \right]_0^9 = 0$$

$$\frac{9^4}{4} - 2 \cdot 9^3 + \frac{9-m}{2} \cdot 9^2 = 0$$

$$9^2 - 8 \cdot 9 + 2(9-m) = 0 \dots ②$$

また β は ① の 2 解 より

$$\beta^2 - 6\beta + (9-m) = 0 \dots ③$$

②-③ より

$$-2\beta + 9 - m = 0$$

$$\therefore 9 - m = 2\beta$$

③ より

$$\beta^2 - 4\beta = 0$$

$$\beta(\beta - 4) = 0$$

$$\beta \neq 0 \text{ より } \beta = 4 \quad m = 1$$

③ ① より $a = 2$

$$S_1 + S_2 = 2 \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2$$

$$= 8$$

注

9次関数は変曲点(対称の中心)に関して点対称なため、 $y=qmx$ が2点を通るときに2つの図形の面積は等しくなり、それ以外にない。

変曲点(対称の中心の求め方)

理系: 2回微分

文系: x座標は $y=f(x)$ の頂点のx座標