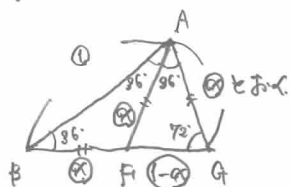


①



$\triangle BAG$ と $\triangle AGF$ の相似比を $1:\alpha$ とおくと

$$AG:GF = BA:AF$$

$$\alpha:1-\alpha = 1:\alpha$$

$$\alpha^2 = 1-\alpha$$

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

$$\alpha > 0 \text{ より } \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$FG = 2(1-\alpha)$$

$$= 2\left(1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{2-\sqrt{5}}{2} = \boxed{2-\sqrt{5}}$$

$$\vec{BD} = (1+\alpha)\vec{AB}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot 2\vec{a} = \boxed{(1+\sqrt{5})}\vec{a}$$

$$\vec{AC} = \vec{AE} + \vec{EC}$$

$$= 2\vec{a} + (1+\sqrt{5})\vec{a}$$

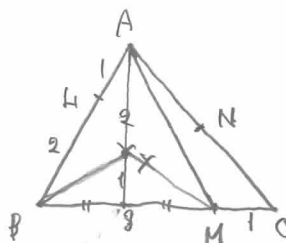
$$= \boxed{(1+\sqrt{5})}\vec{a} + \boxed{2}\vec{a}$$

<point>

① ベクトルの基本

② ベクトルの分解

②



$$\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$$

$$\vec{AX} = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AM}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\vec{AB} + \frac{1}{9}\vec{AM}$$

$$= \frac{1}{9}\vec{AB} + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}\right)$$

$$= \frac{5}{12}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$$

$$\vec{NY} = \frac{1}{9}\vec{NB} + \frac{1}{9}\vec{NC}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}\right) + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$= \frac{1}{9}\vec{AB}$$

$$\vec{AY} = \vec{AN} + \vec{NY}$$

$$= \frac{1}{9}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$\vec{XY} = \vec{AY} - \vec{AX}$$

$$= \frac{1}{9}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} - \left(\frac{5}{12}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}\right)$$

$$= -\frac{1}{12}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$$

$$= -\frac{1}{12}(\vec{AC} - \vec{BC}) + \frac{1}{4}\vec{AC}$$

$$= \frac{1}{6}\vec{AC} + \frac{1}{12}\vec{BC}$$

$$\vec{CL} = \frac{1}{9}\vec{AB} - \vec{AC}$$

$$= \frac{1}{9}(\vec{AC} - \vec{BC}) - \vec{AC} = -\frac{2}{9}\vec{AC} - \frac{1}{9}\vec{BC} \text{ より}$$

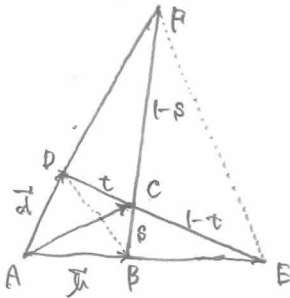
$$\vec{XY} = \boxed{-\frac{1}{4}}\vec{CL}$$

$$\begin{aligned}
 \text{四角形 } AB \times M &= \frac{2}{9} \Delta ABM \\
 &= \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{4} \Delta ABC \\
 &= \frac{1}{2} \Delta ABC
 \end{aligned}$$

$$\therefore \tau = \boxed{\frac{1}{2}}$$

③

$$\begin{aligned}
 \text{① } \vec{AC} &= \frac{4}{5} \vec{u} + \frac{3}{5} \vec{d} \\
 &= \frac{7}{5} \left(\frac{4}{7} \vec{u} + \frac{3}{7} \vec{d} \right)
 \end{aligned}$$



$\vec{AE} = k\vec{u}$, $\vec{AF} = l\vec{d}$ ($k, l \in \mathbb{R}$) とおける

$DC:CE = t:1-t$ とおくと

$$\begin{aligned}
 \vec{AC} &= t\vec{AE} + (1-t)\vec{AF} \\
 &= kt\vec{u} + (1-t)l\vec{d}
 \end{aligned}$$

$\vec{u}$ と $\vec{d}$ は 1 次独立より

$$\begin{cases} kt = \frac{4}{5} \\ 1-t = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \therefore k = 2$$

$\therefore \vec{AE} = 2\vec{u}$

$BC:CF = s:1-s$ とおくと

$$\begin{aligned}
 \vec{AC} &= (1-s)\vec{AB} + s\vec{AF} \\
 &= (1-s)\vec{u} + sl\vec{d}
 \end{aligned}$$

$\vec{u}$ と $\vec{d}$ は 1 次独立より

$$\begin{cases} 1-s = \frac{4}{5} \\ sl = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \therefore l = 3$$

$\therefore \vec{AF} = 3\vec{d}$

$$\text{② } \vec{AD} = \frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{d}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{AR} &= \frac{1}{2} \vec{AE} + \frac{1}{2} \vec{AF} \\
 &= \vec{u} + \frac{3}{2} \vec{d}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{QR} &= \vec{AR} - \vec{AQ} \\
 &= \left(\vec{u} + \frac{3}{2} \vec{d} \right) - \left(\frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{d} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \vec{u} + \vec{d}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{③ } \vec{AP} &= \frac{1}{2} \vec{AC} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} \vec{u} + \frac{3}{5} \vec{d} \right) = \frac{2}{5} \vec{u} + \frac{3}{10} \vec{d}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{QP} &= \vec{AP} - \vec{AQ} \\
 &= \left(\frac{2}{5} \vec{u} + \frac{3}{10} \vec{d} \right) - \left(\frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{d} \right) \\
 &= -\frac{1}{10} \vec{u} - \frac{1}{5} \vec{d} = -\frac{1}{5} \vec{QR}
 \end{aligned}$$

$\therefore$ 3 点 P, Q, R は 1 直線上にある

<point> 以下、 $\vec{u}, \vec{d}$ は平面上のベクトルとする

① 1 次独立

$\vec{u} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{d} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{u} \times \vec{d} \neq \vec{0}$ のとき

$\vec{u}, \vec{d}$ は 1 次独立であるという

② 分解の一義性

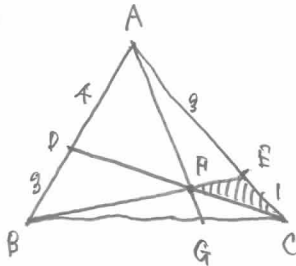
$\vec{u}, \vec{d}$ が 1 次独立のとき

平面上の任意のベクトル $\vec{c}$ は

$\vec{c} = k\vec{u} + l\vec{d}$ ($k, l \in \mathbb{R}$) と $t:1-t$ 通りに分解できる (→ 係数比較できる)

4

d)



$$BF:FE = t:1-t \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned}\vec{AF} &= (1-t)\vec{AB} + t\vec{AE} \\ &= (1-t)\vec{AB} + \frac{9}{4}t\vec{AC}\end{aligned}$$

$$CF:FP = s:1-s \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned}\vec{AF} &= s\vec{AB} + (1-s)\vec{AC} \\ &= \frac{4}{9}s\vec{AB} + (1-s)\vec{AC}\end{aligned}$$

$$\vec{AB}, \vec{AC} \text{ は 1 次独立}$$

$$\begin{cases} 1-t = \frac{4}{9}s \\ \frac{9}{4}t = 1-s \end{cases} \therefore t = \frac{3}{4}$$

よって

$$BF:FE = \frac{9}{4} : \frac{1}{4} = 9:1$$

[別解] メネラウスの定理

$$\begin{aligned}\text{② } \vec{AQ} &= k\vec{AF} \\ &= \frac{k}{4}\vec{AB} + \frac{9}{16}k\vec{AC}\end{aligned}$$

$$Q \text{ は } BC \text{ 上の点より}$$

$$\frac{k}{4} + \frac{9}{16}k = 1 \quad \leftarrow \text{係数合計}$$

$$\frac{13}{16}k = 1 \quad \therefore k = \frac{16}{13}$$

よって

$$\begin{aligned}\vec{AQ} &= \frac{4}{13}\vec{AB} + \frac{9}{13}\vec{AC} \quad \leftarrow \vec{AB} + \vec{AC} \\ &= \vec{AB} + \frac{9}{13}\vec{AC}\end{aligned}$$

よって

$$BQ:QC = 9:4$$

[別解] フェルマの定理

$$\begin{aligned}\text{③ } \triangle EFC &= \frac{1}{4} \triangle BCF \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \triangle ABC \\ &= \frac{1}{16} \triangle ABC\end{aligned}$$

よって

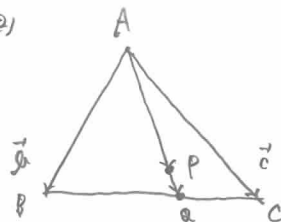
$$\triangle EFC : \triangle ABC = 1:16$$

5

$$\begin{aligned}\text{d) } \vec{AP} + 9\vec{BP} + 5\vec{CP} &= \vec{0} \\ \vec{AP} + 9(\vec{AP} - \vec{AB}) + 5(\vec{AP} - \vec{AC}) &= \vec{0} \quad \leftarrow \text{始点を A にそろえる} \\ 9\vec{AP} &= 9\vec{AB} + 5\vec{AC}\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{AP} = \left[\frac{1}{9} \right] \vec{AB} + \left[\frac{5}{9} \right] \vec{AC}$$

②



$$\vec{AP} = \frac{8}{9} \left(\frac{3}{8} \vec{AB} + \frac{5}{8} \vec{AC} \right) \quad \leftarrow \text{和が1になる}$$

$$\begin{aligned}\vec{AQ} &= \left[\frac{9}{8} \right] \vec{AB} + \left[\frac{5}{8} \right] \vec{AC} \\ &= \frac{9}{8} \vec{AB} + \frac{5}{8} (\vec{AB} + \vec{BC}) \\ &= \vec{AB} + \frac{5}{8} \vec{BC} \quad \text{よって}\end{aligned}$$

$$BQ:QC = \left[\frac{5}{8} \right] : \left[\frac{3}{8} \right]$$

$$AP:PQ = \left[\frac{8}{9} \right] : \left[\frac{1}{9} \right]$$

注

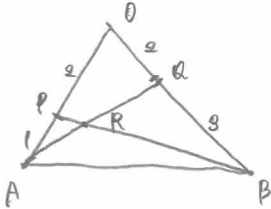
$$\vec{AQ} = k\vec{AP} = \frac{1}{9}k\vec{AB} + \frac{5}{9}k\vec{AC}$$

$$Q \text{ は } BC \text{ 上の点より } \frac{1}{9}k + \frac{5}{9}k = 1 \text{ と } k \text{ を求めよ}$$

[6]

$$\text{a) } \vec{OA} = \frac{1}{p} \vec{OP} = \left[\frac{2}{2} \right] \vec{OP}$$

$$\vec{OB} = \frac{1}{q} \vec{OQ} = \left[\frac{5}{2} \right] \vec{OQ}$$



メネラウスの定理より

$$\frac{QB}{BO} \cdot \frac{OP}{PA} \cdot \frac{AR}{RR} = 1$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{AR}{RR} = 1$$

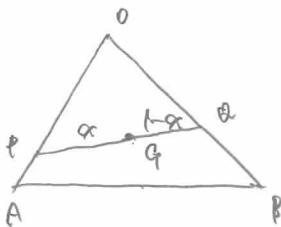
$$\therefore \frac{AR}{RR} = \frac{5}{6} \quad (AR:RR=5:6)$$

よって

$$\begin{aligned} \vec{OR} &= \frac{6}{11} \vec{OA} + \frac{5}{11} \vec{OB} \\ &= \frac{6}{11} \vec{OA} + \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{5} \vec{OQ} \\ &= \left[\frac{6}{11} \right] \vec{OA} + \left[\frac{2}{11} \right] \vec{OQ} \end{aligned}$$

(5) と (6) 同様にしてやってもよい)

$$\text{b) } \vec{OG} = \left[\frac{1}{3} \right] \vec{OA} + \left[\frac{1}{3} \right] \vec{OB}$$



$$\begin{aligned} \vec{OG} &= (1-x) \vec{OB} + x \vec{OQ} \\ &= (1-x) p \vec{OA} + x q \vec{OB} \end{aligned}$$

$\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ は 1 次独立より

$$\begin{cases} (1-x)p = \frac{1}{3} \\ xq = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \therefore p = \frac{1}{3(1-x)} = \left[\frac{1}{3(1-x)} \right]$$

$$\frac{p}{T} = \frac{1}{pq}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3(1-x)} \cdot \frac{1}{3x}}$$

$$= 9x(1-x)$$

$$= -9(x^2 - x)$$

$$= -9\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$$\therefore \frac{p}{T} \text{ は } x = \left[\frac{1}{2} \right] \text{ のとき } \frac{p}{T} \text{ は最大 } \left[\frac{9}{4} \right]$$

とる