高3 数学B　41. 平面ベクトル(2)

$\boxed{1}$

(1) $5\vec{OA}+4\vec{OB}+3\vec{OC}=\vec{0}$ より

$4\vec{OB}+3\vec{OC}=-5\vec{OA}$

$|4\vec{OB}+3\vec{OC}|=|-5\vec{OA}|=5$

$|4\vec{OB}+3\vec{OC}|^2=25$

$16|\vec{OB}|^2+24\vec{OB}\cdot\vec{OC}+9|\vec{OC}|^2=25$

$16+24\vec{OB}\cdot\vec{OC}+9=25$

$\therefore \vec{OB}\cdot\vec{OC}=0$ //

(2) $|\vec{BC}|^2=|\vec{OC}-\vec{OB}|^2$

$=|\vec{OC}|^2-2\vec{OB}\cdot\vec{OC}+|\vec{OB}|^2$

$=2$

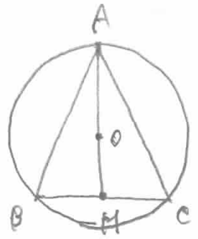
$\therefore |\vec{BC}|=\sqrt{2}$　　$\therefore BC=\sqrt{2}$ //

注.

$\vec{OB}\cdot\vec{OC}=0$ より $\angle BOC=90^\circ$

よって $\triangle OBC$ は $\angle BOC=90^\circ$ の直角二等辺三角形より $BC=\sqrt{2}$

(3)



$\vec{OM}=k\vec{OA}$ ($k\in\mathbb{R}$) とおける

$=k\left(-\frac{4}{5}\vec{OB}-\frac{3}{5}\vec{OC}\right)$

$=-\frac{4}{5}k\vec{OB}-\frac{3}{5}k\vec{OC}$

MはBC上の点より

$-\frac{4}{5}k-\frac{3}{5}k=1$　$\therefore k=-\frac{5}{7}$

よって

$\vec{OM}=\frac{4}{7}\vec{OB}+\frac{3}{7}\vec{OC}$ //　$\vec{OB}+\vec{BC}$

$=\vec{OB}+\frac{3}{7}\vec{BC}$

したがって $BM:MC=3:4$ より

$BM=\sqrt{2}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3\sqrt{2}}{7}$ //

(4) $\vec{OB}\cdot\vec{OM}=|\vec{OB}||\vec{OM}|\cos\angle BOM$ より

$\cos\angle BOM=\dfrac{\vec{OB}\cdot\vec{OM}}{|\vec{OB}||\vec{OM}|}$

$|\vec{OM}|=\left|-\frac{5}{7}\vec{OA}\right|=\frac{5}{7}$

$\vec{OB}\cdot\vec{OM}=\vec{OB}\cdot\left(\frac{4}{7}\vec{OB}+\frac{3}{7}\vec{OC}\right)$

$=\frac{4}{7}|\vec{OB}|^2+\frac{3}{7}\vec{OB}\cdot\vec{OC}$

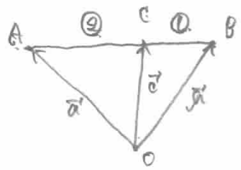
$=\frac{4}{7}\cdot 1^2+\frac{3}{7}\cdot 0=\frac{4}{7}$ より

$\cos\angle BOM=\dfrac{\frac{4}{7}}{1\cdot\frac{5}{7}}=\frac{4}{5}$ //

注. $\triangle OBM$ の3辺の長さが分かっているので余弦定理でもできる.

$\boxed{2}$

(1) $\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ //



(2) $|\vec{c}|^2=\left|\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2$

$25=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2$

$25=\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{193}{9}$

$\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{32}{9}$　　$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=8$ //

(3) $\triangle OAB$ の面積 S は

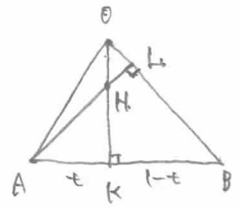
$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{7^2\cdot 6^2-8^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(42+8)(42-8)}$
$\quad 50\cdot 34$

$=5\sqrt{17}$ //

$\boxed{9}$



図のように、K, L をおく。

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2$ より

$$144 = |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2$$

$$144 = 100 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + 64$$

$$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \boxed{10}$$

$AK : KB = t : 1-t$ とおく

$$\overrightarrow{OK} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{OK} \perp \overrightarrow{AB}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{AB} &= \{(1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\ &= (1-2t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - (1-t)|\overrightarrow{OA}|^2 + t|\overrightarrow{OB}|^2\\ &= 10(1-2t) - 64(1-t) + 100t\\ &= 144t - 54 = 0 \qquad \therefore t = \frac{3}{8}\end{aligned}$$

よって

$$\overrightarrow{OK} = \frac{5}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OK}$ $(k \in \mathbb{R})$ とおける

$$= \frac{5}{8}k\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}k\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$$

$$= \left(\frac{5}{8}k - 1\right)\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}k\overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{OB}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB} &= \left\{\left(\frac{5}{8}k-1\right)\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}k\overrightarrow{OB}\right\}\cdot\overrightarrow{OB}\\ &= \left(\frac{5}{8}k-1\right)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{3}{8}k|\overrightarrow{OB}|^2\\ &= 10\left(\frac{5}{8}k-1\right) + 100\cdot\frac{3}{8}k\\ &= \frac{175}{4}k - 10 = 0 \qquad \therefore k = \frac{8}{35}\end{aligned}$$

よって

$$\overrightarrow{OH} = \boxed{\frac{1}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{35}\overrightarrow{OB}}$$

[別解]

$\overrightarrow{OL}$ は $\overrightarrow{OA}$ の $\overrightarrow{OB}$ への正射影ベクトルより

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{10}\overrightarrow{OB}$$

$AH : HL = s : 1-s$ とおくと

$$\overrightarrow{OH} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OL}$$

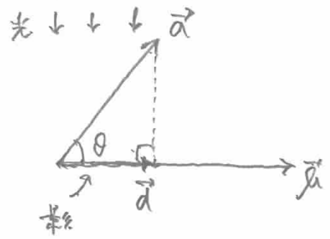
$$= (1-s)\overrightarrow{OA} + \frac{s}{10}\overrightarrow{OB}$$

あとは $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ であるから $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ より

k を求めればよい。

<point>

① 正射影ベクトル



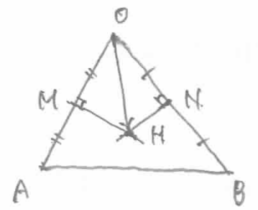
$\vec{d}$ を $\vec{a}$ の $\vec{b}$ への正射影ベクトルという

$$\vec{d} = \underbrace{|\vec{a}|\cos\theta}_{\vec{d}\text{の向き付きの大きさ}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}}_{\vec{b}\text{の単位ベクトル}}$$

$$= \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{b}|^2}\vec{b} \leftarrow \text{分母、分子に}|\vec{b}|\text{をかけた}$$

$$= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

4



OA, OB の中点をそれぞれ M, N とする.

$\vec{OH}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$ とおく.

$$\vec{MH}=\vec{OH}-\vec{OM}$$
$$=\left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{OA}+t\vec{OB}$$

$\vec{MH}\perp\vec{OA}$ より

$$\vec{MH}\cdot\vec{OA}=\left\{\left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{OA}+t\vec{OB}\right\}\cdot\vec{OA}$$
$$=\left(s-\frac{1}{2}\right)|\vec{OA}|^2+t\,\vec{OA}\cdot\vec{OB}$$

ここで

$$|\vec{AB}|^2=|\vec{OB}-\vec{OA}|^2$$
$$=|\vec{OB}|^2-2\vec{OA}\cdot\vec{OB}+|\vec{OA}|^2$$
$$36=25-2\vec{OA}\cdot\vec{OB}+16$$
$$\therefore\ \vec{OA}\cdot\vec{OB}=\frac{5}{2}$$

より

$$\vec{MH}\cdot\vec{OA}=16\left(s-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}t$$
$$=16s+\frac{5}{2}t-8=0\ \cdots①$$

$$\vec{NH}=\vec{OH}-\vec{ON}$$
$$=s\vec{OA}+\left(t-\frac{1}{2}\right)\vec{OB}$$

$\vec{NH}\perp\vec{OB}$ より

$$\vec{NH}\cdot\vec{OB}=\left\{s\vec{OA}+\left(t-\frac{1}{2}\right)\vec{OB}\right\}\cdot\vec{OB}$$
$$=s\,\vec{OA}\cdot\vec{OB}+\left(t-\frac{1}{2}\right)|\vec{OB}|^2$$
$$=\frac{5}{2}s+25\left(t-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{5}{2}s+25t-\frac{25}{2}=0\ \cdots②$$

①, ② より

$$s=\frac{3}{7},\quad t=\frac{16}{35}$$

よって

$$\vec{OH}=\frac{3}{7}\vec{OA}+\frac{16}{35}\vec{OB}\ 〃$$

5

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot2\cdot\cos60^\circ=1$

$\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b},\ \vec{d}=2\vec{a}+\vec{b}$ とおく

$\vec{c}\cdot\vec{d}=|\vec{c}||\vec{d}|\cos\theta$ より

$$\cos\theta=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}||\vec{d}|}$$

$$|\vec{c}|^2=|2\vec{a}-3\vec{b}|^2$$
$$=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$$
$$=4\cdot1^2-12\cdot1+9\cdot2^2=28$$

$\therefore\ |\vec{c}|=2\sqrt{7}$

$$|\vec{d}|^2=|2\vec{a}+\vec{b}|^2$$
$$=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$
$$=4\cdot1^2+4\cdot1+2^2=12$$

$\therefore\ |\vec{d}|=2\sqrt{3}$

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$$
$$=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{b}|^2$$
$$=4\cdot1^2-4\cdot1-3\cdot2^2=-12 \text{ より}$$

$$\cos\theta=\frac{-12}{2\sqrt{7}\cdot2\sqrt{3}}=\boxed{-\frac{\sqrt{21}}{7}}.$$

$$(\vec{p}-2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{p}-2\vec{a}-\vec{b})=0$$
$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{d})=0$$
$$|\vec{p}|^2-(\vec{c}+\vec{d})\cdot\vec{p}+\vec{c}\cdot\vec{d}=0$$
$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right|^2=\frac{|\vec{c}+\vec{d}|^2}{4}-\vec{c}\cdot\vec{d}$$
$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right|^2=\frac{|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{d}}{4}$$
$$=\frac{28+12+24}{4}=16$$

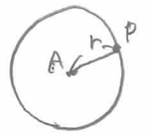
$\therefore \left|\vec{p}-\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right| = 4$

よって $\vec{p}$ の描く円の半径は $\boxed{4}$

<point>

① 円のベクトル方程式

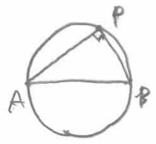
(1) 中心が A($\vec{a}$), 半径が r の円の周上の点を P($\vec{p}$) とすると



$|\overrightarrow{AP}| = r$

$\boxed{|\vec{p}-\vec{a}| = r}$

(2) A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) を直径の両端とする円の周上の点を P($\vec{p}$) とすると $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$ より



$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP} = 0$

$\boxed{(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b}) = 0}$

$\boxed{6}$

(1) $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$ とすると $(k, l \in \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3k + l = 3\\ -k + 3l = 4\end{cases} \quad \therefore k = \frac{1}{2},\ l = \frac{3}{2}$$

よって

$\vec{c} = \overset{ア}{\boxed{\dfrac{1}{2}}}\vec{a} + \overset{イ}{\boxed{\dfrac{3}{2}}}\vec{b}$ //

(2) $\overrightarrow{OL} = \vec{c} + t\vec{d}$ $(t \in \mathbb{R})$ ← 直線のベクトル方程式

ただし $\vec{d}$ は (3, 4), (13, −6) を通る直線の方向ベクトルで $\vec{d} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+t\\4-t\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{OL} = r\vec{a} + s\vec{b}$ と表すと

$$\begin{pmatrix}3+t\\4-t\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

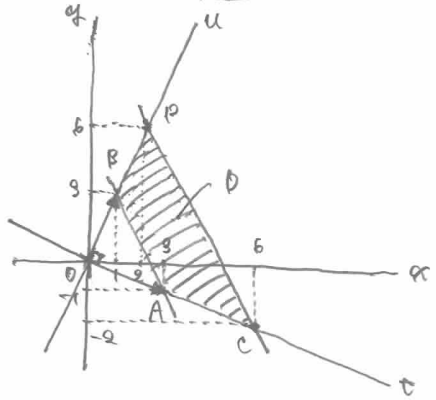
$$\begin{cases}3 + t = 3r + s \cdots ①\\ 4 - t = -r + 3s \cdots ②\end{cases}$$

①+② より

$7 = 2r + 4s$ ← t を消去

$\therefore r + \overset{ウ}{\boxed{2}}s = \overset{エ}{\boxed{\dfrac{7}{2}}}$

(3)



D の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|2\cdot(-2) - 6\cdot 6| - \frac{1}{2}|1\cdot(-1) - 3\cdot 3|$$

$$= 20 - 5 = \boxed{15}$$

図のように A, B, C, D をおいて △OAB, △OCD は直角二等辺三角形であることに注意して

$|\overrightarrow{OP}|$ の最小値は $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{5}}$ ← OA

最大値は $\boxed{2\sqrt{10}}$ ← OC, OD

<point>

① 斜交座標

〈斜交座標〉

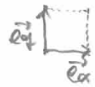
普段用いている座標P(x, y)は

$\vec{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ← 位置ベクトル

$= x\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{e_x}}+y\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{e_y}}$ とおく

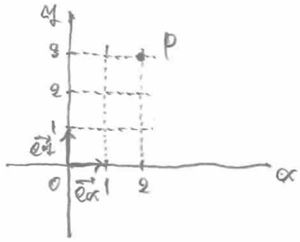
$= x\vec{e_x}+y\vec{e_y}$

と1通りで表せる



Pは$\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$をそれぞれ1辺とする正方形を1マスとする方眼用紙上の点として位置が1通りに決まる

例えばP(2, 3)であれば



Pは図の位置となる

$\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$を基底

この座標平面をx軸, y軸が直交していることから直交座標という

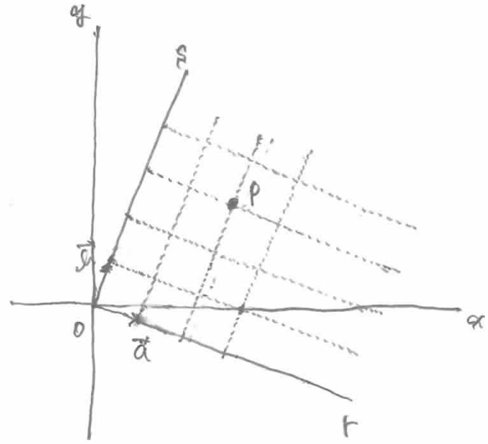
これを念頭において図のように

基底を$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$として

$\vec{OP}=r\vec{a}+s\vec{b}$とすると

(r, s)は$\vec{a}$, $\vec{b}$をそれぞれ1辺とする平行四辺形を1マスとする方眼用紙上の点として位置が1通りに決まる

例えばP(r, s)=(2, 3)であれば



Pは図の位置となる

(r, s)は図のr軸, s軸を座標軸とする座標平面上の座標を表す

一般にr軸とs軸は斜めに交わることからこの座標平面を斜交座標という(この場合は直交しているが)

図について再考

(1) (3, 4)は

直交座標では(3, 4)であるが

基底を$\vec{a}$, $\vec{b}$とした斜交座標内では

$(r, s)=\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$という座標ということ

(2) (3, 4), (13, −6)という直線は

直交座標系では$y=-x+7$であるが

基底を$\vec{a}$, $\vec{b}$とした斜交座標内では

$r+2s=\frac{7}{2}$という直線ということ

(3) $t \geqq 0$, $u \geqq 0$, $1 \leqq t+s \leqq 2$という領域を

基底を$\vec{a}$, $\vec{b}$とした斜交座標内で考えろ

ということ