高3数学β 42.ベクトルと空間図形(1)

[1]

4点A,B,C,Dが同一平面上にあるとき

$\vec{AD}=k\vec{AB}+l\vec{AC}$

となる実数k,lが存在する

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+l\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

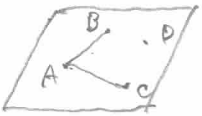
$$\begin{cases} x-1=-k-l \\ 4=2k \\ 5=3l \end{cases}$$

$\therefore k=2,\ l=\frac{5}{3},\ x=\boxed{-\frac{8}{3}}$

<point>

① 4点が同一平面上にある条件
(3つのベクトルが)

4点A,B,C,Dが同一平面上にあるとき

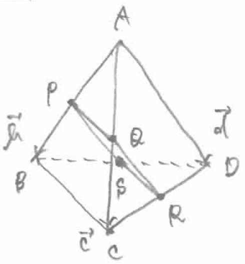


$\vec{AD}=k\vec{AB}+l\vec{AC}$

となる実数k,lが存在する

注.
これは$\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}$が同一平面内にある条件ともいえる.

[2]



$\vec{PQ}=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

$\vec{PR}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$\vec{PS}=\frac{1}{2}\vec{d}$ より

$\vec{PR}=\vec{PQ}+\vec{PS}\quad(k=1,\ l=1)$

よってP,Q,R,Sは同一平面上にある□.

$\vec{PS}=\vec{QR}=\frac{1}{2}\vec{d}$ より $|\vec{PS}|=|\vec{QR}|=\frac{1}{2}|\vec{d}|$

$\vec{PQ}=\vec{SR}=\frac{1}{2}\vec{BC}$, $|\vec{BC}|=|\vec{d}|$ より

$|\vec{PQ}|=|\vec{SR}|=\frac{1}{2}|\vec{BC}|=\frac{1}{2}|\vec{d}|$

よって四角形P,Q,R,Sはひし形である

$\vec{PQ}\cdot\vec{PS}=\left(\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\frac{1}{2}\vec{d}$

$=\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{d}-\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{d}$

$\vec{c}\cdot\vec{d}=|\vec{c}||\vec{d}|\cos 60^\circ$, $\vec{b}\cdot\vec{d}=|\vec{b}||\vec{d}|\cos 60^\circ$

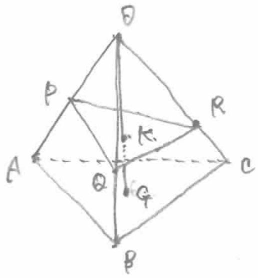
$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|$ であるから $\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}$ より

$=0$

よって$\angle QPS=90^\circ$

したがって四角形PQRSは正方形である□.

[3]



$\vec{OG}=\frac{1}{3}\vec{OA}+\frac{1}{3}\vec{OB}+\frac{1}{3}\vec{OC}$

O,K,Gは同一直線上にあるから

$\vec{OK}=k\vec{OG}\quad(k\in\mathbb{R})$

$=\frac{1}{3}k\vec{OA}+\frac{1}{3}k\vec{OB}+\frac{1}{3}k\vec{OC}$

$\vec{OA}=2\vec{OP}$, $\vec{OB}=\frac{3}{2}\vec{OQ}$, $\vec{OC}=\frac{4}{3}\vec{OR}$ より

$$\vec{OK}=\frac{2}{3}k\vec{OP}+\frac{1}{2}k\vec{OQ}+\frac{4}{9}k\vec{OR}$$

Kは平面PQR上の点より

$$\frac{2}{3}k+\frac{1}{2}k+\frac{4}{9}k=1$$

$$\frac{29}{18}k=1 \quad \therefore k=\frac{18}{29}$$

$\vec{OK}=\frac{18}{29}\vec{OG}$ より

$$OK:KG=18:11 \,/\!/$$

[別解]

Kは平面PQR上の点より

$$\vec{OK}=\alpha\vec{OP}+\beta\vec{OQ}+\gamma\vec{OR},\ \alpha+\beta+\gamma=1$$

O, K, Gは同一直線上にあるから

$$\begin{aligned}\vec{OG}&=k\vec{OK}\quad (k\in\mathbb{R})\\&=k\alpha\vec{OP}+k\beta\vec{OQ}+k\gamma\vec{OR}\\&=\frac{1}{2}k\alpha\vec{OA}+\frac{2}{3}k\beta\vec{OB}+\frac{3}{4}k\gamma\vec{OC}\end{aligned}$$

$\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$は1次独立より

$$\begin{cases}\frac{1}{2}k\alpha=\frac{1}{3} & \therefore k\alpha=\frac{2}{3}\cdots① \\ \frac{2}{3}k\beta=\frac{1}{3} & \therefore k\beta=\frac{1}{2}\cdots② \\ \frac{3}{4}k\gamma=\frac{1}{3} & \therefore k\gamma=\frac{4}{9}\cdots③\end{cases}$$

①+②+③ より

$$k(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{29}{18}$$

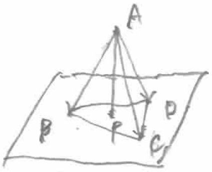
$$\therefore k=\frac{29}{18}$$

⋮

<point>

① 共面条件

Pが平面ABC上にあるとき



$$\vec{AP}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}+\gamma\vec{AD},\ \alpha+\beta+\gamma=1.$$

$\boxed{4}$

$$AP=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\boxed{\sqrt{14}}$$

$$|\vec{OA}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\boxed{3}$$

$$|\vec{OB}|=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=\boxed{5}$$

$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$ より

$$|\vec{AB}|^2=|\vec{OB}-\vec{OA}|^2$$

$$|\vec{AB}|^2=|\vec{OB}|^2-2\vec{OA}\cdot\vec{OB}+|\vec{OA}|^2$$

$$14=25-2\vec{OA}\cdot\vec{OB}+9$$

$$\therefore \vec{OA}\cdot\vec{OB}=10$$

$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=|\vec{OA}||\vec{OB}|\cos\theta$ より

$$\cos\theta=\frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{|\vec{OA}||\vec{OB}|}=\frac{10}{3\cdot5}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

△AOBの面積Sは

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{OA}|^2|\vec{OB}|^2-(\vec{OA}\cdot\vec{OB})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{3^2\cdot5^2-10^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{25\cdot5}=\boxed{\frac{5}{2}\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$\vec{OA}$, $\vec{OB}$のどちらにも垂直で大きさが$\sqrt{5}$のベクトルを $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ とおくと

$\vec{OA}\perp\vec{n}$ より

$$\vec{OA}\cdot\vec{n}=2a+b-2c=0\cdots①$$

$\vec{OB}\perp\vec{n}$ より

$$\vec{OB}\cdot\vec{n}=3a+4b=0\cdots②$$

$|\vec{n}|^2=5$ より

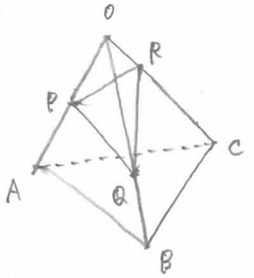
$$a^2+b^2+c^2=5\cdots③$$

①~③ より

$$\vec{n}=\boxed{\begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\-\frac{6}{5}\\1\end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix}-\frac{8}{5}\\\frac{6}{5}\\-1\end{pmatrix}}\,/\!/$$

$\boxed{5}$

(1)



$|\vec{OA}|=|\vec{OB}|=|\vec{OC}|=1$

$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\vec{OB}\cdot\vec{OC}=\vec{OC}\cdot\vec{OA}$

$=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

$\vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}=\frac{2}{3}\vec{OB}-\frac{1}{2}\vec{OA}$

$|\vec{PQ}|^2=|\frac{2}{3}\vec{OB}-\frac{1}{2}\vec{OA}|^2$

$=\frac{4}{9}|\vec{OB}|^2-\frac{2}{3}\vec{OA}\cdot\vec{OB}+\frac{1}{4}|\vec{OA}|^2$

$=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{36}$

$\therefore |\vec{PQ}|=\frac{\sqrt{13}}{6}$ //

$\vec{PR}=\vec{OR}-\vec{OP}=\frac{1}{4}\vec{OC}-\frac{1}{2}\vec{OA}$

$|\vec{PR}|^2=|\frac{1}{4}\vec{OC}-\frac{1}{2}\vec{OA}|^2$

$=\frac{1}{16}|\vec{OC}|^2-\frac{1}{4}\vec{OC}\cdot\vec{OA}+\frac{1}{4}|\vec{OA}|^2$

$=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

$\therefore |\vec{PR}|=\frac{\sqrt{3}}{4}$ //

(2) $\vec{PQ}\cdot\vec{PR}=(\frac{2}{3}\vec{OB}-\frac{1}{2}\vec{OA})\cdot(\frac{1}{4}\vec{OC}-\frac{1}{2}\vec{OA})$

$=\frac{1}{6}\vec{OB}\cdot\vec{OC}-\frac{1}{3}\vec{OA}\cdot\vec{OB}-\frac{1}{8}\vec{OC}\cdot\vec{OA}$

$+\frac{1}{4}|\vec{OA}|^2$

$=-\frac{7}{24}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{5}{48}$ //

(3) △PQRの面積をSとすると

$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{PQ}|^2|\vec{PR}|^2-(\vec{PQ}\cdot\vec{PR})^2}$

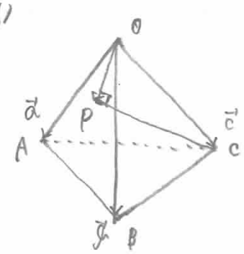
$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{36}\cdot\frac{3}{16}-\frac{5^2}{48^2}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13\cdot3}{24^2}-\frac{5^2}{48^2}}$

$=\frac{\sqrt{131}}{96}$ //

$\boxed{6}$

(1)



$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+0^2}=\sqrt{5}$ //

$|\vec{b}|=\sqrt{5^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{30}$ //

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot5+1\cdot2+0\cdot(-1)=12$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB$ より

$\cos\angle AOB=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{12}{5\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ //

(2) △OABの面積をSとすると

$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot30-12^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ //

(3) $\vec{CP}=\vec{OP}-\vec{OC}$

$=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$

$\vec{CP}\perp\vec{a}$ より

$\vec{CP}\cdot\vec{a}=(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}$

$=s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=2-5+0=-3$ より

$=5s+12t+3=0$ …①

$\vec{CP}\perp\vec{b}$ より

$\vec{CP}\cdot\vec{b}=(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}$

$=s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=5-10-1=-6$ より

$=12s+30t+6=0$ …②

①, ② より

$s=-3,\ t=1$ //

(4) $|\vec{CP}|^2 = |-3\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|^2$

$= 9|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+6\vec{c}\cdot\vec{a}$

$= 45+30+27-72+12-18 = 24$

$\therefore |\vec{CP}| = 2\sqrt{6}$

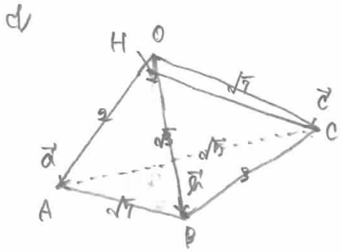
四面体OABCの体積Vは

$V = \frac{1}{3}\cdot S\cdot|\vec{CP}|$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot 2\sqrt{6} = 2$ //

$\boxed{7}$

(1)



$\vec{b}-\vec{a} = \vec{AB}$ より

$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = 7$

$|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2 = 7$

$3-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4 = 7 \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\vec{c}-\vec{b} = \vec{BC}$ より

$|\vec{c}-\vec{b}|^2 = 9$

$|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2 = 9$

$7-2\vec{b}\cdot\vec{c}+3 = 9 \quad \therefore \vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{1}{2}$ //

$\vec{a}-\vec{c} = \vec{CA}$ より

$|\vec{a}-\vec{c}|^2 = 5$

$|\vec{a}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{c}|^2 = 5$

$4-2\vec{c}\cdot\vec{a}+7 = 5 \quad \therefore \vec{c}\cdot\vec{a} = 3$ //

(2) Hは平面α上にあるから

$\vec{OH} = s\vec{a}+t\vec{b} \quad (s, t \in \mathbb{R})$

とおける

$\vec{CH} = \vec{OH}-\vec{OC}$

$= s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$

$\vec{CH}\perp\vec{a}$ より

$\vec{CH}\cdot\vec{a} = (s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}$

$= s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}$

$= 4s-3 = 0 \quad \therefore s = \frac{3}{4}$

$\vec{CH}\perp\vec{b}$ より

$\vec{CH}\cdot\vec{b} = (s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}$

$= s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}$

$= 3t-\frac{1}{2} = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{6}$

よって

$\vec{OH} = \frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$ //

(3)

$|\vec{CH}| = \left|\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}-\vec{c}\right|$

$= \frac{1}{12}|9\vec{a}+2\vec{b}-12\vec{c}|$

$|\vec{CH}|^2 = \frac{1}{12^2}|9\vec{a}+2\vec{b}-12\vec{c}|^2$

$= \frac{1}{12^2}(81|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+144|\vec{c}|^2+36\vec{a}\cdot\vec{b}$
$-48\vec{b}\cdot\vec{c}-216\vec{c}\cdot\vec{a})$

$= \frac{1}{12^2}(324+12+1008-24-648)$

$= \frac{672}{12^2} = \frac{42}{3^2}$

$\therefore |\vec{CH}| = \frac{\sqrt{42}}{3}$

三角形OABの面積Sは

$S = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}$ ← $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ より $\angle AOB = 90°$

四面体OABCの体積Vは

$V = \frac{1}{3}\cdot S\cdot|\vec{CH}|$

$= \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{42}}{3} = \frac{\sqrt{14}}{3}$ //