

高3 数学B 45. 等差数列・等比数列

[1]

d) 1から100までの9の倍数は

$$\begin{array}{ccc} 9, 18, 27, \dots, 99 \\ \parallel & & \parallel \\ 9 \times 1 & & 9 \times 11 \end{array}$$

これらの和は

$$\frac{99(9+99)}{2} = 1689$$

e) 1から100までの5の倍数は

$$\begin{array}{ccc} 5, 10, \dots, 100 \\ \parallel & & \parallel \\ 5 \times 1 & & 5 \times 20 \end{array}$$

これらの和は

$$\frac{100(5+100)}{2} = 1050$$

f) 9の倍数かつ5の倍数である数は
15の倍数

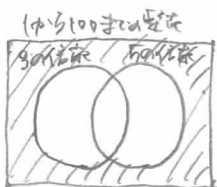
1から100までの15の倍数は

$$\begin{array}{ccc} 15, 30, \dots, 90 \\ \parallel & & \parallel \\ 15 \times 1 & & 15 \times 6 \end{array}$$

これらの和は

$$\frac{90(15+90)}{2} = 915$$

g)



求める和

$$\begin{aligned} &= (1から100までの整数の和) \\ &\quad - (1から100までの9の倍数の和) \\ &\quad \quad - (1から100までの5の倍数の和) \end{aligned}$$

1から100までの整数の和は

$$\frac{100(1+100)}{2} = 5050$$

1から100までの9の倍数の和と5の倍数の和

$$= (1から100までの9の倍数の和) + (1から100までの5の倍数の和) - (1から100までの15の倍数の和)$$

$$= 1689 + 1050 - 915$$

$$= 2418$$

よって求める和は

$$5050 - 2418 = 2632$$

[2]

$$a_n, \frac{5n+1}{5}, \frac{5n+2}{5}, \frac{5n+3}{5}, \frac{5n+4}{5}, a_{n+1}, \dots, \frac{5n-1}{5}, a_n$$

求める和

$$\begin{aligned} &= \text{初項 } a_n, \text{ 末項 } \frac{5n-1}{5} \quad \leftarrow \text{初項 } a_n, \text{ 末項 } a_{n+1} \\ &\quad \text{公差 } \frac{1}{5} \text{ の等差数列の和} \quad \text{公差 } 1 \text{ の等差数列の和} \\ &\quad \dots \textcircled{1} \quad \quad \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①の和は

$$\{(a_n - 1) - a_{n+1} + 1\} \times 5 = 5(a_n - a_{n+1})$$

②の和は

$$(a_{n+1} - 1) - a_n + 1 = a_{n+1} - a_n$$

求める和は

$$\begin{aligned} &\frac{5(a_n - a_{n+1})(a_{n+1} - 1)}{2} - \frac{(a_n - a_{n+1})(a_{n+1} - 1)}{2} \\ &= \frac{(a_n - a_{n+1})(5a_{n+1} - 5 - 1)}{2} - \frac{(a_n - a_{n+1})(a_{n+1} - 1)}{2} \\ &= \frac{a_n - a_{n+1}}{2} \{(5a_{n+1} - 6) - (a_{n+1} - 1)\} \\ &= 2(a_n - a_{n+1})(a_{n+1}) \end{aligned}$$

[別解]



$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{n - a_n}{5} + 1 \right\} (a_{n+1} + a_n) - \frac{1}{2} (a_n - a_{n+1})(a_{n+1}) =$$

③

この数列を $\{a_n\}$ とする

初項を a , 公差を d とする

$$a_{50} = 2013 \text{ より}$$

$$a + 49d = 2013 \dots ①$$

$$a_{150} = 213 \text{ より}$$

$$a + 149d = 213 \dots ②$$

①, ② より

$$d = -4, a = 2209$$

$$a_n = 2209 + (n-1) \cdot (-4)$$

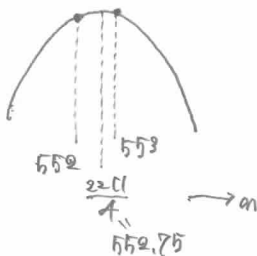
$$= 2213 - 4n$$

$$S_n = \frac{n(2209 + (2213 - 4n))}{2}$$

$$= -2n^2 + 2211n$$

$$= -2 \cdot \left\{ n - \frac{2211}{2} \right\}^2 + \frac{2211^2}{2}$$

$$= -2 \left(n - \frac{2211}{4} \right)^2 + \frac{2211^2}{8}$$



S_n は $n = 553$ のとき最大

【別解】

S_n は正の項のみを足したときに最大となる

$a_n > 0$ となるのは

$$2213 - 4n > 0$$

$$n < \frac{2213}{4} = 553.25$$

$n \in \mathbb{N}$ より $n \leq 553$ のとき

よって S_n が最大となるのは $n = 553$ のとき

④

$m \in \mathbb{N}$

$n \in \mathbb{N}$

(1) a_n ($n \geq 1$) から a_{m+n-1} ($n \geq 2$) までの連続する n 個の自然数の和が 50 となる

$$\frac{n(a_n + (a_{m+n-1}))}{2} = 50$$

$$n(2a_n + n - 1) = 100$$

$n < 2a_n + n - 1$ より

$$2a_n + n - 1 = a_n + (a_{m+n-1}) \text{ であるから}$$

n と $2a_n + n - 1$ のいずれかが偶数であることを注意して

$$\begin{array}{c|cc} n & 4 & 5 \\ \hline 2a_n + n - 1 & 25 & 20 \end{array}$$

$$\therefore (n, a_n) = (1, 4), (8, 5)$$

よって

$$(1, 2, 3, 4) \text{ 或 } (8, 9, 10, 11, 12)$$

(2) (1) と (4) に同じ

$$\frac{n(2a_n + n - 1)}{2} = 2^k \text{ と仮定すると}$$

$$n(2a_n + n - 1) = 2^{k+1}$$

$$n \geq 2, n \in \mathbb{N} \text{ より } n = 2^l \text{ } (1 \leq l \leq k+1)$$

$$\text{このとき, } 2a_n + n - 1 = 2(a_n + 2^{l-1}) - 1$$

は奇数となり 2 の累乗で表せないので矛盾

よって題意は示された

[5]

初項2, 公比4の等比数列の
初項から第 n 項までの和を S_n と
すると

$$S_n = \frac{2(4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{2(4^n - 1)}{3}$$

$S_n > 10000$ となるとき

$$\frac{2(4^n - 1)}{3} > 10000$$

$$2 \cdot 4^n > 30002$$

$$4^n > 15001$$

4^n の位の数は 4, 6, ... であるから

$$4^n > 15000$$

とんでも n に影響はない

$$\log_{10} 4^n > \log_{10} 15000$$

$$2n \cdot \log_{10} 2 > \log_{10} 3 + \log_{10} 10^4 - \log_{10} 2$$

$$0.60206n > 4.1761$$

$$\therefore n > 6.93$$

よって n は $n > 10000$ となる

$$n$$
 は $n = 7$

[6]

① $1, r^2, r^4$ が等差数列より

$$2r^2 = 1 + r^4 \leftarrow \text{等差中項}$$

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0$$

$$(r-1)(r^2-r-1) = 0$$

$$\therefore r = 1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{よって } r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$r < 2$$

$$r^2 - r - 1 = 0 \text{ より } r^2 = r + 1 > 2 \text{ より}$$

$$r < 2 < r^2$$

② $1, r^m, r^{m+2}$ が等差数列と仮定すると

$$2r^m = 1 + r^{m+2}$$

$$r^m(2 - r^2) = 1$$

$$r^m > 0, 2 - r^2 < 0 \text{ であるから}$$

$$r^m(2 - r^2) < 0 \text{ となり矛盾}$$

よって題意は示された

③ $r > 1$ より $m < n$

$1, r^m, r^{n-m}$ が等差数列より

$$2r^m = 1 + r^{n-m}$$

$$r^m(2 - r^{n-m}) = 1$$

$$r^m > 0 \text{ より } 2 - r^{n-m} > 0$$

$$2 - r^{n-m} > 0 \text{ となるのは } n - m = 1 \text{ のときのみ}$$

このとき

$$r^m(2 - r) = 1$$

$2 - r$ は定数

よって $m = 2$ は解である r は有理数より

これを満たす m はこの世にない

$$(m, n) = (2, 3) \text{ 以外に存在しない}$$