

高3数学β 47. 漸化式と数列

[1]

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = a_n + 2^n - 2a_n$$

$$a_{n+1} - a_n = 2^n - 2a_n$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \text{ とおくと } b_n = 2^n - 2a_n$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2) \quad \uparrow \{b_n\} \text{ は } \{a_n\} \text{ の 階差数列}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^k - 2a_k)$$

$$= 1 + \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n$$

$$= 1 + 2^n - 2 - n^2 + n$$

$$= 2^n - n^2 + n - 1$$

よって $a_n = 1$ のときも成り立ち

$$a_n = 2^n - n^2 + n - 1 \quad (n \geq 1)$$

<point>

① 階差型

[2]

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n}\right) a_n$$

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n \quad \text{より}$$

$$a_n = \frac{n+1}{n-1} a_{n-1}$$

$$= \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} a_{n-2}$$

$$= \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n-1}{n-3} \cdot \frac{n-2}{n-4} \cdot \frac{n-3}{n-5} \cdot \frac{n-4}{n-6} \cdot \frac{n-5}{n-7} a_1$$

$$= \frac{1}{2} n(n+1)$$

[別解]

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+2} = \frac{a_n}{n}$$

両辺 $n+1$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+1)} = \frac{a_n}{(n+1)n}$$

$$b_n = \frac{a_n}{(n+1)n} \text{ とおくと } b_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b_{n+1} = b_n$$

$\{b_n\}$ は定数列より $b_1 = \frac{1}{2}$ の定数列より

$$b_n = \frac{1}{2}$$

$$b_n = \frac{a_n}{(n+1)n} \quad \text{より}$$

$$a_n = n(n+1)b_n$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

<point>

① 階差型

[3]

$$a_1 = 9$$

$$a = 2a + 1 \quad \therefore a = -1$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

$$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

$$\{a_n + 1\} \text{ は初項 } a_1 + 1 = 10$$

公比 2 の等比数列より

$$a_n + 1 = 10 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 2^{n+1} - 1$$

[別解] 階差法

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \dots ①$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad \dots ②$$

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 19$$

① - ② より

$$a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}) \quad (n \geq 2)$$

$$d_n = a_{n+1} - a_n \text{ とおくと } d_1 = a_2 - a_1 = 19 - 9 = 10$$

$$d_n = 2d_{n-1}$$

$$\{d_n\} \text{ は初項 } d_1 = 10$$

公比 2 の等比数列より

$$d_n = 10 \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^{n+1} \quad \leftarrow \{d_n\} \text{ は } \{a_n\} \text{ の 階差数列}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k \quad (n \geq 2) \\
 &= 9 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1} \\
 &= 9 + \frac{4(2^n - 1)}{2 - 1} \\
 &= 2^{n+1} - 1
 \end{aligned}$$

∴ $n=1$ のときも $a_1=9$ である。

$$a_n = 2^{n+1} - 1 \quad (n \geq 1)$$

③ $b_n = 2$

$$b_{n+1} = 2b_n + a_n \quad \text{①}$$

$$b_{n+1} - \{\alpha(n+1) + \beta\} = 2\{b_n - (\alpha n + \beta)\}$$

変形する

$$b_{n+1} - (\alpha n + \alpha + \beta) = 2b_n - 2(\alpha n + \beta)$$

$$b_{n+1} = 2b_n - \alpha n + \alpha - \beta \quad \text{②}$$

①, ② より任意の a_n で b_n が成り立つようにしたい。

$$\begin{cases} -\alpha = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \quad \therefore \alpha = -1, \beta = -1$$

$$b_{n+1} - (-n + 1 - 1) = 2\{b_n - (-n - 1)\}$$

$$\{b_n - (-n - 1)\} \text{ は初項 } b_1 + 2 = 4$$

公比 2 の等比数列より

$$b_n - (-n - 1) = 4 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore b_n = 2^{n+1} - n - 1$$

[別解]

1 階差法を 2 回使ってもできるが面倒。

<point>

$p \neq 0$ は当然の前提だが、
← 書いておく

$$\textcircled{1} a_{n+1} = pa_n + q \quad (p \neq 1, q \neq 0)$$

$$a_{n+1} = pa_n + qa_n + r \quad (p \neq 1, q \neq 0)$$

$$a_{n+1} = pa_n + qa_n^2 + ra_n + s \quad (p \neq 1, q \neq 0) \text{ 型}$$

↓ ③ はオマケ

③ $c_1 = 2$

$$c_{n+1} = 2c_n + \frac{1}{2}n(n-1) \quad 2 \geq 2 \times 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$c_{n+1} - \{\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma\} = 2\{c_n - (\alpha n^2 + \beta n + \gamma)\}$$

と変形する

$$c_{n+1} - (\alpha n^2 + (2\alpha + \beta)n + \alpha + \beta + \gamma) = 2c_n - 2(\alpha n^2 + \beta n + \gamma)$$

$$c_{n+1} = 2c_n - \alpha n^2 + (2\alpha + \beta)n + \alpha + \beta - \gamma \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より任意の a_n で c_n が成り立つようにしたい。

$$\begin{cases} -\alpha = \frac{1}{2} \\ 2\alpha + \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \quad \therefore \alpha = -\frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = -1$$

$$c_{n+1} - \{-\frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) - 1\} = 2\{c_n - (-\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1)\}$$

$$\{c_n - (-\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1)\} \text{ は初項 } c_1 + 2 = 4$$

公比 2 の等比数列より

$$c_n - (-\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1) = 4 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore c_n = 2^{n+1} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1$$

④

$$a_1 = -1000$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 2^{an}$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 4^{an}$$

④ は $4^{a_{n+1}}$ で割る。

$$\frac{a_{n+1}}{4^{a_{n+1}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{4^{a_n}} + \frac{1}{4}$$

$$b_n = \frac{a_n}{4^{a_n}} \text{ とおくと } b_1 = \frac{a_1}{4} = -250$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4} \quad \alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4} \quad \therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

$$b_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(b_n - \frac{1}{2})$$

$$\{b_n - \frac{1}{2}\} \text{ は初項 } b_1 - \frac{1}{2} = -\frac{501}{2}$$

公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列より

$$b_n - \frac{1}{2} = -\frac{501}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore s_n = \frac{1}{2} - \frac{501}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$s_n = \frac{a_n}{4^n} \text{ より}$$

$$a_n = 4^n \cdot s_n$$

$$= 4^n \left\{ \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{501}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4^n - 501 \cdot 2^n$$

$$= \frac{1}{2} (2^{2n} - 501 \cdot 2^n) = \frac{501^2}{2} \leftarrow \begin{matrix} 2=2^1 \text{ と } 501^2 \\ \text{と } 2^n \text{ と } 501 \end{matrix}$$

$n=9$ のとき

a_n は最小



[別解]

$$a_{n+1} = 2a_n + 4^n$$

両辺 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 2^{n-1}$$

$$s_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} \text{ とおくと}$$

$$s_{n+1} = s_n + 2^{n-1} \text{ (階差型)}$$

<point>

$$\textcircled{1} a_{n+1} = p a_n + q^n \text{ (} p \neq 1, q \neq 0, 1 \text{)}$$

両辺 q^{n+1} で割ると $a_{n+1} = p a_n + q^n$ 型
階差型

[5]

$$\textcircled{1} a_2 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\textcircled{2} a_1 = \frac{9}{2}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2^n}$$

両辺 2^{n+1} をかけて

$$2^{n+1} a_{n+1} = 2^n a_n + 2$$

$$s_n = 2^n a_n \text{ とおくと } s_n = 2 \cdot a_n = 2 \cdot \frac{9}{2} = 9$$

$$s_{n+1} = \boxed{s_n + 2}$$

③ $\{s_n\}$ は初項 $s_1 = 9$

公差 2 の等差数列より

$$s_n = 9 + (n-1) \cdot 2$$

$$= \boxed{2n+1}$$

$$s_n = 2^n a_n \text{ より}$$

$$a_n = \frac{s_n}{2^n} = \frac{2n+1}{2^n}$$

④ $S = \sum_{k=1}^n a_k$ とおくと

$$S = 9 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + (2n+1) \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$-) \frac{1}{2} S = 9 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + (2n-1) \cdot \frac{1}{2^n} + (2n+1) \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{2} + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) - (2n+1) \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot \{1 - (\frac{1}{2})^n\}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{5}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{5 \cdot 2^n - 4 - 2n - 1}{2^{n+1}} = \boxed{\frac{5 \cdot 2^n - 2n - 5}{2^{n+1}}}$$

注

本問は基本パターンには含まれないが、少し変えられても、置き換えて基本パターンに持ちこめるものか、ほとんどいなので、対応できるようにしておきたい。

[6]

d) $a_1 = \frac{1}{2}$

$$a_{n+1} = 2^{10} a_n^4$$

漸化式より 帰納的に $a_n > 0$

両辺底2の対数をとって

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2^{10} a_n^4$$

$$3 \log_2 a_{n+1} = 4 \log_2 a_n + 10$$

$$b_n = \log_2 a_n \text{ とおくと } b_1 = \log_2 a_1 = -1$$

$$3 b_{n+1} = 4 b_n + 10$$

$$\therefore b_{n+1} = \frac{4}{3} b_n + \frac{10}{3}$$

(2) $b_1 = -1$

$$b_{n+1} = \frac{4}{3} b_n + \frac{10}{3} \quad \alpha = \frac{4}{3} \alpha + \frac{10}{3}$$

$$\therefore \alpha = -10$$

$$b_{n+1} + 10 = \frac{4}{3} (b_n + 10)$$

$$\{b_n + 10\} \text{ は初項 } b_1 + 10 = 9$$

公比 $\frac{4}{3}$ の等比数列より

$$b_n + 10 = 9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n = 9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 10 //$$

(3) $b_n = \log_2 a_n$ より

$$\begin{aligned} a_n &= 2^{b_n} \\ &= 2^{9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 10} < 2^{2015} \end{aligned}$$

左 $2 > 1$ より

$$9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 10 < 2015$$

$$9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} < 2025$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} < 225 = 3^2 \cdot 5^2$$

両辺底2の対数をとって

$$\log_2 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} < \log_2 225$$

$$(n-1)(\log_2 4 - \log_2 3) < 2(\log_2 3 + \log_2 5)$$

$$(n-1)(2 - \log_2 3) < 2(\log_2 3 + \log_2 5)$$

$$0.415(n-1) < 7.814$$

$$n-1 < 18. \dots$$

$$n < 19. \dots$$

よって $a_n < 2^{2015}$ とする最大の n は

$$n = 18 //$$

<point>

① 対数変換!

[7]

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} + 1} \\ &= \frac{\frac{a_n - 2}{a_n + 1} - 2}{\frac{a_n - 2}{a_n + 1} + 1} \\ &= \frac{a_n - 2}{a_n + 4} \\ &= \frac{1}{4} b_n \end{aligned}$$

$$\{b_n\} \text{ は初項 } b_1 = \frac{a_1 - 2}{a_1 + 1} = \frac{1}{4}$$

公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列より

$$b_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{4^n}$$

$$b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 1} \text{ より}$$

$$a_n = \frac{-b_n - 2}{b_n - 1} \quad (b_n \neq 1)$$

$$\therefore a_n = \frac{-\frac{1}{4^n} - 2}{\frac{1}{4^n} - 1}$$

$$= \frac{2 \cdot 4^n + 1}{4^n - 1}$$

<point>

① 分散型 I

$$a_{n+1} = \frac{pa_n}{ran + s} \quad \text{型 I}$$

→ 逆数をとって $lan = \frac{1}{an}$ とおく

② 分散型 II

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ran + s} \quad \text{型 II} \quad (ps - qt \neq 0)$$

① 誘導に依る

② 一般項を推定して帰納法

③ 循環型 → [8]

[8]

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_2 - 1}{a_2 + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_3 - 1}{a_3 + 1} = -3$$

$$a_5 = \frac{a_4 - 1}{a_4 + 1} = 2$$

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 1} = \frac{\frac{a_n - 1}{a_n + 1} - 1}{\frac{a_n - 1}{a_n + 1} + 1} = -\frac{1}{a_n} \\ &= -\frac{1}{\frac{a_{n-1} - 1}{a_{n-1} + 1}} = -\frac{a_{n-1} + 1}{a_{n-1} - 1} = -\frac{\frac{a_{n-2} - 1}{a_{n-2} + 1} + 1}{\frac{a_{n-2} - 1}{a_{n-2} + 1} - 1} \\ &= a_n \end{aligned}$$

$$a_{2n+1} = a_{2n-1} = \dots = a_1 = 2$$

↓

<point>

① 3項間漸化式

① 特性解が異なる2解 → [9]

② " 重解

$$\rightarrow a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \alpha (a_{n+1} - \alpha a_n)$$

右解いて [9] に帰着.

[9]

$$a_1 = 3, a_2 = 5$$

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$$

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n)$ と変形する

$$\begin{cases} a_{n+2} + \beta a_{n+1} + \alpha a_n = 0 \\ a_{n+2} - (\alpha + \beta) a_{n+1} + \alpha \beta a_n = 0 \end{cases} \quad \text{と変形}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\alpha \\ \alpha \beta = 3 \end{cases} \quad \text{となる } \alpha, \beta \text{ は}$$

$$x^2 + \alpha x + 3 = 0 \text{ の 2 解である}$$

α, β は

$x^2 - 3x + 2 = 0$ の 2 解である ← 特性方程式

$$(x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore \alpha = 1, 2 \text{ ← 特性解}$$

$(\alpha, \beta) = (1, 2)$ のとき

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$$

$$\{a_{n+1} - a_n\} \text{ は 2 倍数列 } a_2 - a_1 = 2$$

∴ 2 の n 乗に比例する

$$a_{n+1} - a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 2^n \quad \text{①}$$

$(\alpha, \beta) = (2, 1)$ のとき

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n$$

$$\{a_{n+1} - 2a_n\} \text{ は 1 倍数列 } a_2 - 2a_1 = -1$$

a 定数数列より

$$a_{n+1} - 2a_n = -1 \quad \text{②}$$

① - ② より

$$a_n = 2^n + 1 //$$

[別解]

① (1倍差型), ② ($a_{n+1} = pa_n + q$ 型) を解いてもよい.

(特性解に $\alpha = 1$ を代入するとき) ① や ② の方が早に解ける.

★

10

d) $a_1 = 1, a_2 = 2$

$a_3 = a_2 - a_1 + 6 = 7$

$a_4 = a_3 - a_2 + 6 = 11$

e) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 6$

$a_{n+2} - a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + 6$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおく と $b_n = a_2 - a_1 = 1$

$b_{n+1} = b_n + 6 \quad b_{n+1} - b_n = 6$

g) $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 1$ 公差 6 の等差数列より
 $b_n = 1 + (n-1) \cdot 6$
 $= 6n - 5$

$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の隣差数列より

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$
 $= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k - 5)$
 $= 1 + 6 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n - 5(n-1)$
 $= 3n^2 - 8n + 6$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$a_n = 3n^2 - 8n + 6 \quad (n \geq 1)$

注. 一般に.

$a_{n+2} + p a_{n+1} + q a_n + \boxed{} = 0$ は
 定数
 1次式
 2次式
 の形の式.

$a_{n+2} - d a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - d a_n) + \boxed{}$

と変形して $b_n = a_{n+1} - d a_n$ とおく

と、 β は $\boxed{}$ を無視して

$\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ を考え、その2解である。

11

$a_1 = 1, b_1 = 0$

$a_{n+1} = \frac{5}{4} a_n - \frac{9}{4} b_n + 1 \dots ①$

$b_{n+1} = -\frac{9}{4} a_n + \frac{5}{4} b_n + 1 \dots ②$ ← 係数対称型

①+② より

$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2} (a_n + b_n) + 2$

$c_n = a_n + b_n$ とおく $c_1 = a_1 + b_1 = 1$

$c_{n+1} = \frac{1}{2} c_n + 2 \quad \alpha = \frac{1}{2} \alpha + 2 \quad \therefore \alpha = 4$

$c_{n+1} - 4 = \frac{1}{2} (c_n - 4)$

$\{c_n - 4\}$ は初項 $c_1 - 4 = -3$

公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列より

$c_n - 4 = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore c_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 4$

$c_n = a_n + b_n$ より

$a_n + b_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 4 \dots ③$

①-② より

$a_{n+1} - b_{n+1} = 2(a_n - b_n)$

$\{a_{n+1} - b_{n+1}\}$ は初項 $a_1 - b_1 = 1$

公比 2 の等比数列より

$a_n - b_n = 2^{n-1} \dots ④$

③+④ より

$2a_n = 4 + 2^{n-1} - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n = \boxed{2} + \frac{1}{4} 2^n - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

③-④ より

$2b_n = 4 - 2^{n-1} - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore b_n = \boxed{2} - \frac{1}{4} 2^n - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

<point>

① 連立漸化式'1.

$$\begin{cases} a_{n+1} = p a_n + q b_n \\ b_{n+1} = q a_n + p b_n \end{cases} \quad (\text{係数対称型})$$

2式をたす. ひく.

② 連立漸化式'2

係数非対称型

① たす. ひく. ほうまぐい

② 順番に求める

③ a_n か b_n を消去して 2 変数に
もつてみる.

[12]

d) $a_1 = 1$

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &= 2a_{2n+1} \\ &= 2(a_{2n} + 2^{n-1}) \\ &= 2a_{2n} + 2^n \leftarrow \text{1 変数の漸化式} \end{aligned}$$

両辺 2^{n+1} で割って

$$\frac{a_{2n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_{2n}}{2^n} + \frac{1}{2} \quad a_2 = 2a_1 = 2$$

$$b_n = \frac{a_{2n}}{2^n} \text{ とおくと } b_1 = \frac{a_2}{2} = 1$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}$$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 1$

公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列より

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{a_{2n}}{2^n} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 2^n b_n \\ &= 2^n \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \right) \\ &= (n+1) \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= a_{2n} + 2^{n-1} \\ &= (n+1) \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ &= (n+2) \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \sum_{k=1}^{2n} a_k &= \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k+1} + \sum_{k=1}^n a_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{2k+1} + 1 - (n+2) \cdot 2^{n-1} + \sum_{k=1}^n a_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^n (k+1) \cdot 2^{k-1} + \sum_{k=1}^n (k+2) \cdot 2^{k-1} - (n+2) \cdot 2^{n-1} + 1 \\ &= \sum_{k=1}^n (2k+3) \cdot 2^{k-1} - (n+2) \cdot 2^{n-1} + 1 \\ S &= \sum_{k=1}^n (2k+3) \cdot 2^{k-1} \text{ とおく} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= 5 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 2^2 + \dots + (2n+3) \cdot 2^{n-1} \\ -) 2S &= \quad 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2^2 + \dots + (2n+1) \cdot 2^{n-1} + (2n+3) \cdot 2^n \\ \hline -S &= 2(1+2+\dots+2^{n-1}) + 3 - (2n+3) \cdot 2^n \\ &= 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} + 3 - (2n+3) \cdot 2^n \\ &= - (2n+1) \cdot 2^n + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore S = (2n+1) \cdot 2^n - 1$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} a_k &= (2n+1) \cdot 2^n - 1 - (n+2) \cdot 2^{n-1} + 1 \\ &= 3n \cdot 2^{n-1} // \end{aligned}$$