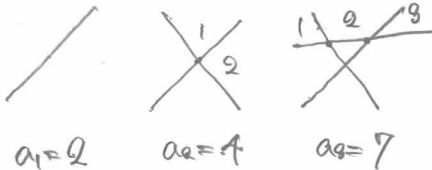


高3数学β 補正率評価式

①

d)



直線を1本加えると

交点の数に1個ずつ増えるから

$$a_{n+1} = a_n + n + 1$$

$$a_{n+1} - a_n = n + 1$$

$\sum_{k=1}^n (k+1)$ とおくと

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \quad (n \geq 2)$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}(n-1)(n+2) + (n-1)$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)(n+2) + 2$$

これは $n=1$ のときも成り立つから

$$a_n = \frac{1}{2}(n-1)(n+2) + 2 \quad (n \geq 1)$$

e) 同様に.

$n-1$ 本の直線が条件を満たすようにあって、 n 本目をいすれかの直線に平行に引くと

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \text{ 交点は } a_{n-1} \text{ (平行)}$$

$$= \frac{1}{2}(n-2)(n+1) + 2 + n - 1$$

$$= \frac{1}{2}(n-2)(n+1) + n + 1$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)$$

注.

①②は場合の数と平行線の問題です。

②

d) 1日目の車 8000L

2日目の車 $8000 \times 0.9 + 200 = 7400$ L

3日目の車 $7400 \times 0.9 + 200 = 6860$ L

$$a_{n+1} = \frac{9}{10}a_n + 200$$

$$a_1 = 8000$$

$$a_{n+1} = \frac{9}{10}a_n + 200$$

$$d = \frac{9}{10}d + 200$$

$$\therefore d = 2000$$

$$a_{n+1} - 2000 = \frac{9}{10}(a_n - 2000)$$

$\{a_n - 2000\}$ は初項 $a_1 - 2000 = 6000$

公比 $\frac{9}{10}$ の等比数列より

$$a_n - 2000 = 6000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 6000 \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} + 2000$$

$a_n < 2400$ となるとき

$$6000 \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} + 2000 < 2400$$

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < \frac{1}{15}$$

(両辺底が10の対数をとって

$$\log_{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < \log_{10} \frac{1}{15}$$

$$n(2\log_{10} 3 - 1) < \log_{10} 2 - \log_{10} 3 - 1$$

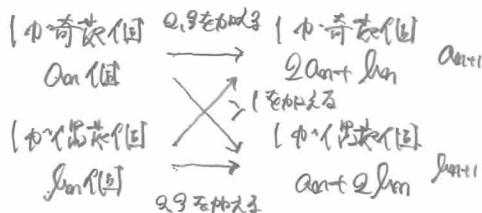
$$-0.0970 \dots n < -1.1761$$

$$\therefore n \geq 12 \dots$$

よって12日目の車

9

d) n 桁 n+1 桁値: n+1 桁



$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \dots ① \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \dots ② \end{cases}$$

e) $a_1 = 1, b_1 = 2$

①+② より

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n)$$

$\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 3$
公比 3 の等比数列より

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= 3 \cdot 3^{n-1} \\ &= 3^n \dots ③ \end{aligned}$$

①-② より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n$$

$\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = 1$ の
定数列より

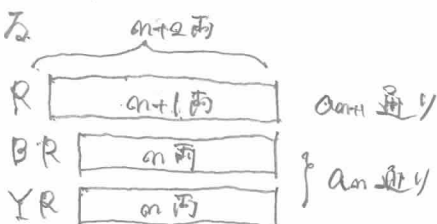
$$a_n - b_n = 1 \dots ④$$

③, ④ より

$$a_n = \frac{3^n + 1}{2}, b_n = \frac{3^n - 1}{2} //$$

4

条件を満たす並べ方を a_n 通りとする



(R が 1 番目と 2 番目のどちらでも出来る)
(初項は 1 になる)

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, a_1 = 9, a_2 = 5$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 2 \end{aligned}$$

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n)$$

$\{a_{n+1} + a_n\}$ は初項 $a_1 + a_2 = 8$

公比 2 の等比数列より

$$a_{n+1} + a_n = 8 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_{n+1} + a_n = 2^{n+2} \dots ①$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n)$$

$\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = -1$

公比 -1 の等比数列より

$$a_{n+1} - 2a_n = (-1) \cdot (-1)^{n-1}$$

$$\therefore a_{n+1} - 2a_n = (-1)^n \dots ②$$

①, ② より

$$a_n = \frac{2^{n+2} - (-1)^n}{3} //$$

注.

$n \geq 2$ という条件があるから、作り方から
 $n=1$ のとき $a_1=9$ と考えるから、初項を
 $a_1=9$ として解いていこう。

<point>

① 漸化式は最初のしずか、最後のしずかで作る (この場合、最後のしずかばかり考えにくい)

[5]

$$d) p_2 = {}_2C_1 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

$$p_3 = {}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 + {}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2$$

90倍率の確率 9回

$$= \frac{4}{9} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27}$$

e) n回目 n+1回目

奇数回 $\xrightarrow{\frac{2}{9}}$ 奇数回 p_{n+1} 状態遷移図

偶数回 $\xrightarrow{\frac{1}{9}}$ 偶数回 $1-p_n$

$$p_{n+1} = \frac{2}{9} p_n + \frac{1}{9} (1-p_n)$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{9} p_n + \frac{1}{9}$$

$$g) p_1 = \frac{1}{9}$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{9} p_n + \frac{1}{9} \quad d = \frac{1}{9} d + \frac{1}{9}$$

$$\therefore d = \frac{1}{2}$$

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{9} (p_n - \frac{1}{2})$$

$$\{p_n - \frac{1}{2}\} \text{ は初項 } p_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

公比 $\frac{1}{9}$ の等比数列

$$p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

[5]と[6]にはほぼ同様の問題です

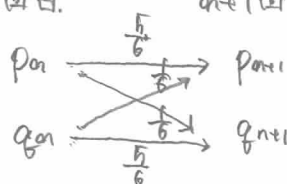
1文字でやってもよい、2文字でや

てもよいというだけです

[6]

d) n回目

n+1回目



$$p_{n+1} = \frac{5}{6} p_n + \frac{1}{6} q_n \dots ①$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{6} p_n + \frac{5}{6} q_n \dots ②$$

$$e) p_1 = \frac{5}{6}, q_1 = \frac{1}{6}$$

①-②より

$$p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{2}{9} (p_n - q_n)$$

$$\{p_n - q_n\} \text{ は初項 } p_1 - q_1 = \frac{2}{3}$$

公比 $\frac{2}{9}$ の等比数列より

$$p_n - q_n = \left(\frac{2}{9}\right)^n \dots ③$$

g) ①+②より

$$p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + q_n$$

$$\{p_n + q_n\} \text{ は初項 } p_1 + q_1 = 1$$

の定数数列より

$$p_n + q_n = 1 \dots ④$$

③, ④より

$$p_n = \frac{1}{2} \left\{1 + \left(\frac{2}{9}\right)^n\right\}, q_n = \frac{1}{2} \left\{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^n\right\}$$

[別解]

$$③より p_n = q_n + \left(\frac{2}{9}\right)^n \dots ⑤$$

③に⑤を代入して

$$q_{n+1} = q_n + \left(-\frac{2}{9}\right)^n \leftarrow \text{階差型}$$

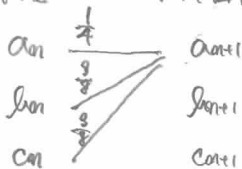
として解いてもよい (p_nは出てきた

ものを⑤に代入)

7

d) $a_1 = \frac{1}{4}, b_1 = \frac{9}{8}, c_1 = \frac{9}{8}$

e) n回目 n+1回目



$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{9}{8}b_n + \frac{9}{8}c_n \dots ①$$

$$b_{n+1} = \frac{9}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{9}{8}c_n \dots ②$$

$$c_{n+1} = \frac{9}{8}a_n + \frac{9}{8}b_n + \frac{1}{4}c_n \dots ③$$

g) $a_n + b_n + c_n = 1 \ (n \geq 1)$ より

$$b_n + c_n = 1 - a_n$$

① より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{9}{8}(b_n + c_n) \\ &= \frac{1}{4}a_n + \frac{9}{8}(1 - a_n) \\ &= -\frac{1}{8}a_n + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

h) $a_1 = \frac{1}{4}$

$$a_{n+1} = -\frac{1}{8}a_n + \frac{9}{8} \quad \therefore d = -\frac{1}{8}d + \frac{9}{8}$$

$$a_{n+1} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{8}(a_n - \frac{1}{9}) \quad \therefore d = -\frac{1}{8}$$

$$\{a_n - \frac{1}{9}\} \text{ は初項 } a_1 - \frac{1}{9} = -\frac{1}{12}$$

$$\therefore a_n - \frac{1}{9} = -\frac{1}{12} \cdot (-\frac{1}{8})^{n-1}$$

$$a_n - \frac{1}{9} = -\frac{1}{12} \cdot (-\frac{1}{8})^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{9} - \frac{1}{12} \cdot (-\frac{1}{8})^{n-1}$$

d, e) において b_n と c_n を入れか
えても同じになるので $b_n = c_n \ (n=1, 2, \dots)$

5, 7

$$b_n = c_n = \frac{1}{2}(1 - a_n)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{8} \right)^{n-1} \right\}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{24} \left(-\frac{1}{8} \right)^{n-1}$$

[別解]

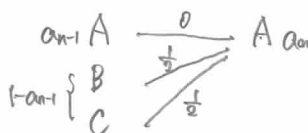
b_n, c_n は a_n と対称にしても解ける

a_n と対称式により b_n, c_n の初項が異なることに

$b_n = c_n$ は作問内容で示してもよい。

8

d) n-1回目 n回目



$$a_n = \frac{1}{2}(1 - a_{n-1}) \ (n \geq 2)$$

e) $a_1 = 1$

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2} \ (n \geq 1) \quad \begin{aligned} d &= -\frac{1}{2}d + \frac{1}{2} \\ \therefore d &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$a_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(a_n - \frac{1}{3})$$

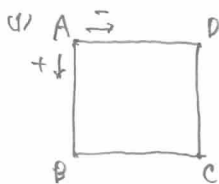
$$\{a_n - \frac{1}{3}\} \text{ は初項 } a_1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$$

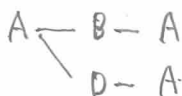
$$a_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$$

9



2秒後にAにある確率は



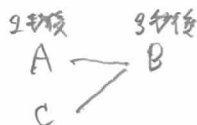
$$\frac{2}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

Cにある確率は



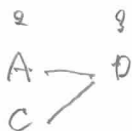
$$\frac{2}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

② 3秒後にBにある確率は



$$\frac{4}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{13}{27}$$

Dにある確率は



$$\frac{4}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{5}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{14}{27}$$

③ n 秒後にA, B, C, Dにある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とする

① $n = 2k-1$ ($k \in \mathbb{N}$) のとき

$$a_n, c_n = 0.$$

2秒後 2k+1秒後



$$b_{2k+1} = \frac{2}{9} a_{2k} + \frac{1}{9} c_{2k} \dots ①$$



$$d_{2k+1} = \frac{1}{9} a_{2k} + \frac{2}{9} c_{2k} \dots ②$$

$$b_{2k+1} + d_{2k+1} = 1, \quad a_{2k} + c_{2k} = 1 \dots ③$$

② $n = 2k$ のとき

$$b_n, d_n = 0$$

2k-1秒後 2k秒後



$$a_{2k} = \frac{1}{9} b_{2k-1} + \frac{2}{9} d_{2k-1} \dots ④$$



$$c_{2k} = \frac{2}{9} b_{2k-1} + \frac{1}{9} d_{2k-1} \dots ⑤$$

④, ⑤より

$$\begin{aligned} a_{2k+2} &= \frac{1}{9} b_{2k+1} + \frac{2}{9} (1 - b_{2k+1}) \\ &= -\frac{1}{9} b_{2k+1} + \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{2k+1} &= \frac{2}{9} a_{2k} + \frac{1}{9} (1 - a_{2k}) = \frac{1}{9} a_{2k} + \frac{1}{9} \text{ より} \\ &= -\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} a_{2k-1} + \frac{1}{9} \right) + \frac{2}{9} \\ &= -\frac{1}{9^2} a_{2k-1} + \frac{5}{9^2} \end{aligned}$$

$$a_2 = \frac{4}{9}$$

$$a_{2k+2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{9} \left(a_{2k} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\left\{ a_{2k} - \frac{1}{2} \right\} \text{ は初項 } a_2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{18}$$

$\lambda = -\frac{1}{9}$ の等比数列より

$$a_{2k} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{18} \cdot \left(-\frac{1}{9} \right)^{k-1}$$

$$\therefore a_{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} \left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9}\right)^k$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 0 & (n: \text{奇数}) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}} & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

$$c_{2k} = 1 - a_{2k} \text{ より}$$

$$c_{2k} = 1 - \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9}\right)^k \right\} \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9}\right)^k$$

$$\therefore c_n = \begin{cases} 0 & (n: \text{奇数}) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}} & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

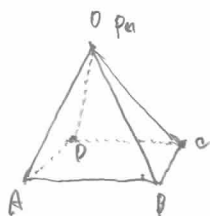
$$b_{2k+1} = \frac{2}{9} a_{2k} + \frac{1}{9} c_{2k} \\ = \frac{2}{9} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9}\right)^k \right\} + \frac{1}{9} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9}\right)^k \right\} \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{9}\right)^k$$

$$\therefore b_n = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} & (n: \text{奇数}) \\ 0 & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

$$d_{2k+1} = 1 - b_{2k+1} \text{ より}$$

$$d_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} & (n: \text{奇数}) \\ 0 & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

10



n 秒後に O, A, B, C, D にある確率をそれぞれ p_n, a_n, b_n, c_n, d_n とすると
 $p_1 = 0, a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = \frac{1}{4}$

$$p_{n+1} = \frac{1}{9} a_n + \frac{1}{9} b_n + \frac{1}{9} c_n + \frac{1}{9} d_n$$

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} + d_{n+1} = 1 - p_{n+1} \text{ より}$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{9} (1 - p_n) \quad p_1 = 0$$

$$p_{n+1} = -\frac{1}{9} p_n + \frac{1}{9} \quad \alpha = -\frac{1}{9} \alpha + \frac{1}{9}$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{4}$$

$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{9} \left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

$$\{p_n - \frac{1}{4}\} \text{ は初項 } p_1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

公比 $-\frac{1}{9}$ の等比数列より

$$p_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} \quad \text{T点 A, B, C, D にある確率も求めておこう}$$

11

$$\text{① } a_n \quad \frac{\frac{1}{2}}{n+1} \quad a_{n+2}$$

$$p_{n+2} = \frac{1}{2} p_{n+1} + \frac{1}{2} p_n \quad (n \geq 1)$$

$$p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{2} p_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

$$\text{② } p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$p_{n+2} - \frac{1}{2} p_{n+1} - \frac{1}{2} p_n = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \quad \frac{1}{2}x = 1$$

$$\therefore p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2} (p_{n+1} - p_n)$$

$$(x-1)(x+1) = 0 \quad x = 1, -\frac{1}{2}$$

$$\{p_{n+1} - p_n\} \text{ は初項 } p_2 - p_1 = \frac{1}{4} \quad \therefore \alpha = 1, -\frac{1}{2}$$

公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列より

$$p_{n+1} - p_n = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{①}$$

$$\therefore p_{n+1} + \frac{1}{2} p_n = p_{n+1} + \frac{1}{2} p_n$$

$$\{p_{n+1} + \frac{1}{2} p_n\} \text{ は初項 } p_2 + \frac{1}{2} p_1 = 1$$

の定数列より

$$p_{n+1} + \frac{1}{2} p_n = 1 \quad \text{②}$$

①, ② より

$$p_n = \frac{2}{9} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}$$

⑩ 補足.

n 歩後に頂点 A, B, C, D にある確率は対称性より

$$\begin{aligned} a_n = b_n = c_n = d_n &= \frac{1}{4} (1 - p_n) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

でもよいが、一言証明しておく

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{9} b_n + \frac{1}{9} d_n$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{9} a_n + \frac{1}{9} c_n$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{9} b_n + \frac{1}{9} d_n$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{9} a_n + \frac{1}{9} c_n$$

$a_n = b_n = c_n = d_n$ であることを示す
($n \geq 1$)

i) $n=1$ のとき

$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = \frac{1}{4} \quad \text{成り立つ}$$

ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定して
($k=1, 2, \dots$)

$$a_k = b_k = c_k = d_k$$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$a_{k+1} = b_{k+1} = c_{k+1} = d_{k+1} = \frac{1}{4} p_k + \frac{2}{9} a_k$$

$\therefore$ 成り立つ

ii, iii から数学的帰納法より

$$a_n = b_n = c_n = d_n \quad (n \geq 1) \quad \square$$