高3 数学α 1. 複素数と計算

$\boxed{1}$

$z^2+z+3=0$

判別式をDとすると

$D=1^2-12=-11<0$

より$z$は虚数

$|z|^2=z\bar{z}$

$=3$ (解と係数の関係)

$\therefore |z|=\sqrt{3}$ //

[別解]

$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$

$|z|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\pm\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$ //

<point>

① 複素数の絶対値

$z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ に対し

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}$

$\boxed{2}$

i) $z$が実数のとき

ア) $z=1$を解にもつとき

$1^2+1+k=0$ $\therefore k=-2$

イ) $z=-1$を解にもつとき

$(-1)^2-1+k=0$ $\therefore k=0$

ii) $z$が虚数のとき

解と係数の関係より

$z\bar{z}=k$

$|z|^2=z\bar{z}=1$ より

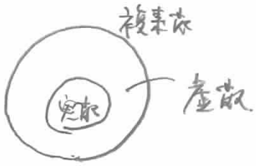
$k=1$

i), ii) より

$k=-2, 0, 1$ //

注

虚数⊂複素数




$\boxed{3}$

$\alpha+\beta=\alpha\beta$

$(\alpha-1)\beta=\alpha$

$\alpha=1$のとき 左辺$=0$, 右辺$=1$ となり不合理

よって$\alpha\neq1$. このとき

$\beta=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}=1+\dfrac{1}{\alpha-1}$

$|\beta|=1$ より

$\left|\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right|=1$

$\dfrac{|\alpha|}{|\alpha-1|}=1$

$|\alpha|=|\alpha-1|$

$|\alpha-1|=1$　　$\alpha\in\mathbb{R}$とすると $\alpha-1=\pm1$ $\therefore \alpha=2, 0$

$|\alpha-1|^2=1$　　$|\alpha|=1$に反するので $\alpha\notin\mathbb{R}$

$(\alpha-1)(\overline{\alpha-1})=1$

$(\alpha-1)(\bar{\alpha}-1)=1$

$\alpha\bar{\alpha}-\alpha-\bar{\alpha}+1=1$

$|\alpha|^2-\alpha-\bar{\alpha}=0$　　$\therefore \alpha+\bar{\alpha}=1$

$|\alpha|=1$ より $|\alpha|^2=\alpha\bar{\alpha}=1$

$\alpha, \bar{\alpha}$を2解とする2次方程式の1つは

$z^2-(\alpha+\bar{\alpha})z+\alpha\bar{\alpha}=0$

$z^2-z+1=0$　　$\therefore z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき $\beta=1+\dfrac{2}{-1-\sqrt{3}i}=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$　〃　$\beta=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

よって

$(\alpha,\beta)=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{1\mp\sqrt{3}i}{2}\right)$ (複号同順) //

注.

複素数の表し方

① $\alpha \quad \xleftrightarrow{\text{対応}} \quad \vec{OA},\ \vec{\alpha}$

② $a+bi \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (成分ベクトル)

③ $r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ (極座標)

極形式

$\boxed{\text{複素数}}$ $\boxed{\text{ベクトル}}$

できるだけ①の形で解決したい。

②、③でやってもよいが座標(ベクトル)の計算と何も変わらないので複素数を導入した意味がなくなる

$\boxed{4}$

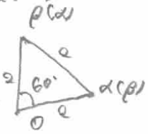
(1) $|\alpha-\beta|=2$ より

$$|\alpha-\beta|^2=4$$
$$(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})=4$$
$$(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})=4$$
$$\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=4$$
$$|\alpha|^2-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+|\beta|^2=4$$
$$4-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+4=4$$
$$\therefore\ \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=4 \cdots ①$$

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|^2&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})\\&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\\&=\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}\\&=|\alpha|^2+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+|\beta|^2\\&=12\end{aligned}$$

$|\alpha+\beta|\geqq 0$ より $|\alpha+\beta|=2\sqrt{3}$ //

(2) $|\alpha|=|\beta|=|\alpha-\beta|=2$ であるから




$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}=1$$
$$\arg\frac{\alpha}{\beta}=\pm 60^\circ$$

より

$$\frac{\alpha}{\beta}=\cos(\pm 60^\circ)+i\sin(\pm 60^\circ)$$
$$\begin{aligned}\frac{\alpha^3}{\beta^3}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3&=(\cos(\pm 60^\circ)+i\sin(\pm 60^\circ))^3\\&=\cos(\pm 180^\circ)+i\sin(\pm 180^\circ)\\&=-1 \ //\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}|\alpha^2+\beta^2|^2&=(\alpha^2+\beta^2)(\overline{\alpha^2+\beta^2})\\&=(\alpha^2+\beta^2)((\overline{\alpha})^2+(\overline{\beta})^2)\\&=|\alpha|^4+\alpha^2(\overline{\beta})^2+(\overline{\alpha})^2\beta^2+|\beta|^4\\&=32+(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)^2-2|\alpha|^2|\beta|^2\\&=32+4^2-32=16\end{aligned}$$

$|\alpha^2+\beta^2|\geqq 0$ より $|\alpha^2+\beta^2|=4$ //

[別解]

(2) ①の両辺に$\alpha\beta$をかけて

$$\alpha^2|\beta|^2+|\alpha|^2\beta^2=4\alpha\beta$$
$$4\alpha^2+4\beta^2=4\alpha\beta$$
$$\alpha^2+\beta^2=\alpha\beta \cdots ②$$
$$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$$

両辺に$\alpha+\beta$をかけて

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=0$$
$$\alpha^3+\beta^3=0$$
$$\therefore\ \frac{\alpha^3}{\beta^3}=-1 \ //$$

(3) ②より

$$\begin{aligned}|\alpha^2+\beta^2|&=|\alpha\beta|\\&=|\alpha||\beta|=4 \ //\end{aligned}$$

$\boxed{5}$

$|\alpha|=1$ であるから $|\overline{\alpha}|=1$ より

$$\begin{aligned}|\alpha-(1+i)|&=|\overline{\alpha}||\alpha-(1+i)|\\&=|\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}(1+i)|\\&=||\alpha|^2-\overline{\alpha}(1+i)|\\&=|1-\overline{\alpha}(1+i)| \quad □\end{aligned}$$

$\boxed{6}$

$z^3-z$ は実数より

$\overline{(z^3-z)}=z^3-z$

$(\overline{z})^3-\overline{z}=z^3-z$

$z^3-(\overline{z})^3-z+\overline{z}=0$

$(z-\overline{z})(z^2+z\overline{z}+(\overline{z})^2)-(z-\overline{z})=0$

$(z-\overline{z})(z^2+(\overline{z})^2+|z|^2-1)=0$

$(z-\overline{z})(z^2+(\overline{z})^2)=0$

$\therefore z-\overline{z}=0$ or $z^2+(\overline{z})^2=0$

・$z-\overline{z}=0$ のとき

$\overline{z}=z$

よって $z$ は実数

$|z|=1$ より $z=\pm 1$

・$z^2+(\overline{z})^2=0$ のとき

$|z|=1$ より

$|z|^2=1$

$z\overline{z}=1$

$z\neq 0$ より $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ ← $|z|=1$ より $z\neq 0$

$z^2+\left(\dfrac{1}{z}\right)^2=0$

$\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2-2=0$

$z+\dfrac{1}{z}=\pm\sqrt{2}$

$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ のとき

$z^2-\sqrt{2}z+1=0$ $\quad\therefore z=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$

$z+\dfrac{1}{z}=-\sqrt{2}$ のとき

$z^2+\sqrt{2}z+1=0$ $\quad\therefore z=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$

よって

$\boxed{6}$個 $z=\pm 1,\ \dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2},\ \dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$ //

注

$z^2+(\overline{z})^2=0$ から $\overline{z}^2=-z^2$, $z^2\neq 0$ より

$z^2$ は純虚数より $z^2=\pm i$ として

解いてもよい.

<point>

① 実部・虚部

$z=a+bi$ $(a, b\in\mathbb{R})$ に対して

$a$ を $z$ の実部といい $a=\mathrm{Re}\,z$

$b$ 　　虚部 　　$b=\mathrm{Im}\,z$ と表す

$$\mathrm{Re}\,z=\frac{z+\overline{z}}{2}$$

$$\mathrm{Im}\,z=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

② 実数・純虚数条件

・$z$ が実数

$\Leftrightarrow \overline{z}=z$ ← $\mathrm{Im}\,z=0$ より

・$\alpha$ が純虚数

$\Leftrightarrow \overline{z}=-z$, $z\neq 0$ ← $\mathrm{Re}\,z=0$ より
ただし $z=0$ のとき
$z\in\mathbb{R}$ なのに $\overline{z}=-z$ が成立する
ので $z\neq 0$ をつける.

$\boxed{7}$

$\alpha+\beta,\ \alpha\beta\in\mathbb{R}$ より

$\overline{\alpha+\beta}=\alpha+\beta$ $\quad\therefore \overline{\alpha}+\overline{\beta}=\alpha+\beta$ …①

$\overline{\alpha\beta}=\alpha\beta$ $\quad\therefore \overline{\alpha}\,\overline{\beta}=\alpha\beta$ …②

① より

$\overline{\beta}=\alpha-\overline{\alpha}+\beta$

② より

$\overline{\alpha}(\alpha-\overline{\alpha}+\beta)=\alpha\beta$ ← 必要ない文字の消去

$\overline{\alpha}\alpha-(\overline{\alpha})^2+\overline{\alpha}\beta-\alpha\beta=0$

$\alpha(\overline{\alpha}-\beta)-\overline{\alpha}(\overline{\alpha}-\beta)=0$

$(\alpha-\overline{\alpha})(\overline{\alpha}-\beta)=0$

$\alpha$ は実数でない複素数であるから

$\alpha-\overline{\alpha}\neq 0$ より

$\overline{\alpha}-\beta=0$ $\quad\therefore \beta=\overline{\alpha}$ □

$\boxed{8}$

(1) $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$ より

$\overline{z+\frac{1}{z}} = z+\frac{1}{z}$

$\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}} = z+\frac{1}{z}$

両辺に $z\bar{z}$ をかけて

$|z|^2\bar{z}+z = |z|^2 z+\bar{z}$

$|z|^2(z-\bar{z})-(z-\bar{z})=0$

$(z-\bar{z})(|z|^2-1)=0$

$z$ は虚数であるから $z-\bar{z}\neq 0$ より

$|z|^2-1=0$ 　∴ $|z|=1$

(2) $z+\frac{1}{z}$ が整数であるためには

実数であることが必要なので $|z|=1$ より

$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおける

$z+\frac{1}{z}=\cos\theta+i\sin\theta+(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}$

$=\cos\theta+i\sin\theta+\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$

$=2\cos\theta$

$z+\frac{1}{z}\in\mathbb{Z}$ となるとき $-1\leqq\cos\theta\leqq 1$

であるから $z+\frac{1}{z}=0, \pm1, \pm2$ より

$\cos\theta=0, \pm\frac{1}{2}, \pm1$

∴ $\theta=0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$

$z$ は虚数より

$z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i, \pm i, -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\boxed{9}$

本来はすべて $+360°\times n$ をつけるべきだが

$\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=\frac{2(\cos60°+i\sin60°)}{\sqrt{2}(\cos45°+i\sin45°)}$ 　計算に影響しないので省略する

$=\sqrt{2}(\underset{(+360°n)}{\cos15°}+i\underset{(+360°n)}{\sin15°})$

$\left|\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right|=\sqrt{2}$

$\arg\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=15°$

<point>

① 極形式.

$\boxed{10}$

(1) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\bar{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)$

$-\bar{z}=-r(\cos\theta-i\sin\theta)$

$=r(-\cos\theta+i\sin\theta)$

$=r(\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta))$

(2) $\frac{1}{z^2}=z^{-2}$

$=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{-2}$

$=r^{-2}(\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta))$

$=\frac{1}{r^2}(\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta))$

(3) $z-|z|=r(\cos\theta+i\sin\theta)-r$

$=r(\cos\theta-1+i\sin\theta)$

$|\cos\theta-1+i\sin\theta|^2=(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta-2\cos\theta+1+\sin^2\theta$

$=2(1-\cos\theta)$

$=4\sin^2\frac{\theta}{2}$

∴ $|\cos-1+i\sin\theta|=2\sin\frac{\theta}{2}$ $(\sin\frac{\theta}{2}\geqq 0)$ より

$=2r\sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{-2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}+i\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right)$

$=2r\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right)$

$=2r\sin\frac{\theta}{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right)$

$=2r\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$

注

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $r>0$

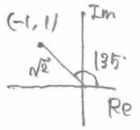
+

11

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r\geqq 0,\ 0^\circ\leqq\theta<360^\circ)$
とおくと

左辺 $=r^3(\cos\theta+i\sin\theta)^3$
$\quad=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)$

右辺 $=8(\cos(135^\circ+360^\circ\cdot n)$
$\quad+i\sin(135^\circ+360^\circ\cdot n))$
$(n\in\mathbb{Z})$




よって

$r^3=8$ $\quad\therefore r=2$

$3\theta=135^\circ+360^\circ\cdot n$ $\quad\therefore\theta=45^\circ+120^\circ\cdot n$

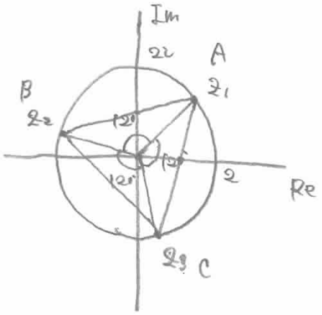
$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ より $n=0,1,2.$

よって $a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{2}$

他の2つの解を $z_2, z_3$ とすると

$z_2=(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)z_1$
$\quad=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1$

$z_3=(\cos240^\circ+i\sin240^\circ)z_1$
$\quad=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1$




A$(z_1)$, B$(z_2)$, C$(z_3)$ とする

中心角$=2\times$円周角より

$\angle CAB=\angle ABC=\angle BCA=60^\circ$

より△ABCは正三角形である//.

<point>

① ド・モアブルの定理

② $n$乗根.

12

(1) $z^5=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$
$\quad=\cos2\pi+i\sin2\pi$
$\quad=1$

$z^4+z^3+z^2+z+1=\frac{z^5-1}{z-1}=0$ $(z\neq1)$

(2) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$

両辺 $z^2$ で割ると

$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$

$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0$

$t=z+\frac{1}{z}$ とおくと

$t^2+t-1=0$ $\quad\therefore t^2+t=1$

(3) $z+\frac{1}{z}=2\cos\frac{2\pi}{5}$

(2)より

$t^2+t-1=0$

$t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\cos\frac{2\pi}{5}>0$ より

$2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad\therefore\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(4)


正五角形の1辺の長さを $l$ とおく

余弦定理より

$l^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\frac{2\pi}{5}$
$\quad=2-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$

[13]

(1) $z^7=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^7$

$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$

$=1$

$$z+z^2+\cdots+z^6=\frac{z(z^6-1)}{z-1}=\frac{z^7-z}{z-1}=\frac{1-z}{z-1}=-1$$

(2) $z^7=1\cdots①$

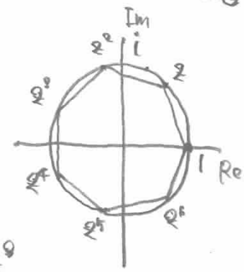
$|z|=1$ であるから $|z|^2=1$ より $z\bar{z}=1 \cdots②$

①, ②より

$z\bar{z}=z^7$

$z\neq 0$ より

$\bar{z}=z^6$




同様にして

$\overline{(z^2)}=z^5,\ \overline{(z^4)}=z^3$

$\alpha+\bar{\alpha}=z+z^2+z^4+\overline{(z+z^2+z^4)}$

$=z+z^2+z^4+\bar{z}+\overline{(z^2)}+\overline{(z^4)}$

$=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$

$=-1$

$\alpha\bar{\alpha}=(z+z^2+z^4)(\bar{z}+\overline{(z^2)}+\overline{(z^4)})$

$=3+z^6+z^4+\underset{z}{\underset{\parallel}{z^8}}+z^5+\underset{z^3}{\underset{\parallel}{z^{10}}}+\underset{z^2}{\underset{\parallel}{z^9}}\ (z^7=1)$

$=2$

(3) 与式

$=(1-z)(1-z^2)(1-z^4)(1-\bar{z})(1-\overline{(z^2)})(1-\overline{(z^4)})$

$=\{1-(z+z^2+z^4)+(z^3+z^5+z^6)-z^7\}$

$\quad\{1-(\bar{z}+\overline{(z^2)}+\overline{(z^4)})+(\overline{(z^3)}+\overline{(z^5)}+\overline{(z^6)})-\overline{(z^7)}\}$

$=(-\alpha+\bar{\alpha})(-\bar{\alpha}+\alpha)$

$=-(\alpha-\bar{\alpha})^2$

$=-\{(\alpha+\bar{\alpha})^2-4\alpha\bar{\alpha}\}$

$=-\{(-1)^2-4\cdot 2\}=7$

【別解】

$x^7=1$

$x^7-1=0$

$(x-1)(x^6+x^5+x^4+\cdots+1)=0$

$x^7-1=0$ は $x=1, z, z^2, \cdots z^6$ を解にもち

これらはすべて異なる解なので

$x^6+x^5+\cdots+1=(x-z)(x-z^2)\cdots(x-z^6)$

と因数分解できる。

$x=1$ を代入して

$(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^6)=7$

[14]

(1) $\alpha^7=\left(\cos\frac{360°}{7}+i\sin\frac{360°}{7}\right)^7$

$=\cos 360°+i\sin 360°$

$=1$

$$\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^6=\frac{\alpha(\alpha^6-1)}{\alpha-1}=\frac{\alpha^7-\alpha}{\alpha-1}=\frac{1-\alpha}{\alpha-1}=-1$$

(2) $$\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\alpha^6}=\frac{(1-\alpha^6)+(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\alpha^6)}=\frac{2-(\alpha+\alpha^6)}{1-(\alpha+\alpha^6)+\alpha^7}=\frac{2-(\alpha+\alpha^6)}{2-(\alpha+\alpha^6)}=1$$

(3) 同様にして

$$\frac{1}{1-\alpha^2}+\frac{1}{1-\alpha^5}=1$$

$$\frac{1}{1-\alpha^3}+\frac{1}{1-\alpha^4}=1$$ より

与式 $=3$

(4) $\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}+\dfrac{\alpha^{12}}{1-\alpha^6}$ $\quad \alpha^{12}=\alpha^5$

$\alpha^7=1,\ |\alpha|=1$ より $\alpha^6=\bar{\alpha}$

$=\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}+\dfrac{\overline{(\alpha^2)}}{1-\bar{\alpha}}$

$=\dfrac{\alpha^2(1-\bar{\alpha})+(\bar{\alpha})^2(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\bar{\alpha})}$

$=\dfrac{\alpha^2+(\bar{\alpha})^2-\alpha\bar{\alpha}(\alpha+\bar{\alpha})}{2-(\alpha+\bar{\alpha})}$

$=\dfrac{(\alpha+\bar{\alpha})^2-(\alpha+\bar{\alpha})-2}{2-(\alpha+\bar{\alpha})}$

$=\dfrac{\{(\alpha+\bar{\alpha})+1\}\{(\alpha+\bar{\alpha})-2\}}{2-(\alpha+\bar{\alpha})}$

$=-(\alpha+\bar{\alpha})-1$

$\dfrac{\alpha^4}{1-\alpha^2}+\dfrac{\alpha^{10}}{1-\alpha^5}$ $\quad \alpha^{10}=\alpha^3$

$=\dfrac{\alpha^4}{1-\alpha^2}+\dfrac{\overline{(\alpha^4)}}{1-\overline{(\alpha^2)}}$ ← 上式のαがα²になっただけ

$=-(\alpha^2+\overline{(\alpha^2)})-1$

$\dfrac{\alpha^6}{1-\alpha^3}+\dfrac{\alpha^8}{1-\alpha^4}$ $\quad \alpha^8=\alpha$

$=\dfrac{\alpha^6}{1-\alpha^3}+\dfrac{\overline{\alpha^6}}{1-\overline{(\alpha^3)}}$

$=-(\alpha^3+\overline{(\alpha^3)})-1$ より

与式 $=-\{(\alpha+\bar{\alpha})+(\alpha^2+\overline{(\alpha^2)})+(\alpha^3+\overline{(\alpha^3)})\}-3$

$=-(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6)-3$

$=-(-1)-3=-2$ //

[別解]

$\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}=\dfrac{(\alpha+1)(\alpha-1)+1}{1-\alpha}$

$=-\alpha-1+\dfrac{1}{1-\alpha}$

同様に

$\dfrac{\alpha^{2n}}{1-\alpha^n}=-\alpha^n-1+\dfrac{1}{1-\alpha^n}$

$(n=1,2,\cdots,6)$

よって

与式 $=-(\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^6)-6$

$+\dfrac{1}{1-\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{1-\alpha^6}$

$=-(-1)-6+3=-2$ //

$\boxed{15}$

$z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$

$=\dfrac{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})}$

$=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

$z^2=2(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})^2$

$=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ $\quad \therefore \theta=\boxed{\frac{\pi}{6}}$

$z^n=(\sqrt{2})^n(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})^n$

$=(\sqrt{2})^n(\cos\frac{n\pi}{12}+i\sin\frac{n\pi}{12})$

$z^n$ が実数となるとき

$\sin\frac{n\pi}{12}=0$

$\frac{n\pi}{12}=k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$

$\therefore n=12k$

これを満たす最小の自然数 $n$ は $n=\boxed{12}$

$\boxed{16}$

$(\sqrt{3}+i)^m=(1+i)^n$

$\{2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)\}^m=\{\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\}^n$

$2^m(\cos 30^\circ m+i\sin 30^\circ m)=2^{\frac{n}{2}}(\cos 45^\circ n+i\sin 45^\circ n)$

$\begin{cases} m=\dfrac{n}{2} & \cdots ① \\ 30^\circ m=45^\circ n+360^\circ k\quad(k\in\mathbb{Z}) & \cdots ② \end{cases}$

①, ② より

$15^\circ n=45^\circ n+360^\circ k$

$n=-12k$

これを満たす最小の自然数 $n=12,\ m=6$ //