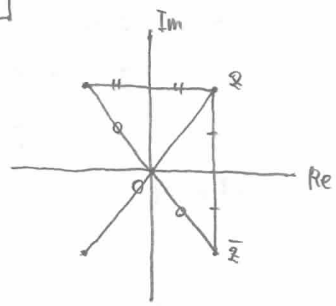
高3数学α 2.複素数平面と図形(1)

[1]




実軸に関して対称移動した点は $\boxed{\bar{z}}$

虚 〃 $\boxed{-\bar{z}}$

原点 〃 $\boxed{-z}$

$z=i\bar{z}$ は

$z=x+yi$ とおくと $(x,y\in\mathbb{R})$

$x+yi=(x-yi)i$

$x+yi=y+xi$

$x,y\in\mathbb{R}$ より $y=x$

$z=x+yi$ と $y=x$ に関して対称な点は $z'=y+xi$

$z'=\boxed{i\bar{z}}$

$z$ を原点を中心に90°回転移動した点は

$(\cos 90°+i\sin 90°)z=\boxed{iz}$

[2]

$|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ (OA)

$z^2=zz$

$=(\sqrt{3}+i)z$

$=2(\cos 30°+i\sin 30°)z$

$z^2$ は $z$ を原点を中心に30°回転し、Oからの距離を2倍に拡大したもの

△OABの面積Sは

$S=\frac{1}{2}\times2\times4\times\sin 30°=\boxed{2}$

$z^2=(\sqrt{3}+i)^2$

$=2+2\sqrt{3}i$

CはBを原点を中心として±60°回転したもの

$(\cos(\pm60°)+i\sin(\pm60°))z^2$

$=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+\sqrt{3}i)$

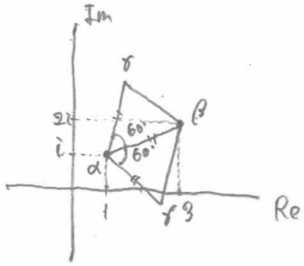
$=1+\frac{\sqrt{3}}{2}i\pm\sqrt{3}i\mp\frac{3}{2}$

$=\boxed{-\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

〈point〉

① 回転移動(原点中心)

[3]




$\gamma=\{\cos(\pm60°)+i\sin(\pm60°)\}\underbrace{(\beta-\alpha)}_{\text{回転の中心を原点まで移動}}\underbrace{+\alpha}_{\text{もとにもどす}}$

$=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+i)+(1+i)$

$=1+\frac{1}{2}i\pm\sqrt{3}i\mp\frac{\sqrt{3}}{2}+1+i$

$=\frac{4-\sqrt{3}}{2}+\frac{3+\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{4+\sqrt{3}}{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}i$

〈point〉

① 回転移動(原点以外中心)

[4]

(1) α, β, γ が同一直線上にあるとき

$\gamma-\alpha=k(\beta-\alpha)$ $(k\in\mathbb{R})$ 　少なくとも α≠β とすべき ↓

$\beta-\alpha\neq0$ より

$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=k$ $(k\in\mathbb{R})$

注 「3点」→「異なる3点」と訂正 α=β のとき $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は定義できない。

逆も成り立つ。□

[別解] $(r\in\mathbb{R},\ r>0)$

$\gamma-\alpha=r(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)(\beta-\alpha)$

or

$\gamma-\alpha=r(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)(\beta-\alpha)$

$\therefore \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm r$

(2) $z=i$ のとき

3点とも $-1$ となり同一直線上にある

$z\neq i$ のとき

$$\frac{z^2+1}{iz+1}=\frac{-\cancel{(iz+1)}(iz-1)}{\cancel{iz+1}}$$

$=1-iz$ が実数となればよい。

$\overline{1-iz}=1-iz$

$1+i\bar{z}=1-iz$

$\bar{z}=-z$

よって $z$ は純虚数または $0$

以上より

$z$ は純虚数または $0$ //

<point>

① 共線条件

異なる3点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ が同一直線上にある

$\Leftrightarrow \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数

注.

3点が同一直線上にある状態を「共線」という

$\boxed{5}$

$\angle BAC=90^\circ$ となるとき

$$\frac{(3+it)-(1+i)}{(5-i)-(1+i)}=\frac{2+(t-1)i}{4-2i}$$

$$=\frac{\{2+(t-1)i\}(4+2i)}{20}=\frac{(5-t)+2ti}{10}$$

が純虚数となればよいから

$5-t=0,\quad t\neq 0$

$\therefore t=5$ //

<point>

① 直交条件

異なる3点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ に対して

$\angle BAC=90^\circ$

$\Leftrightarrow \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r\{\cos(\pm 90^\circ)+i\sin(\pm 90^\circ)\}$

$(r\in\mathbb{R};\ r>0)$ より

$\boxed{6}$

(1) 少なくとも2つが等しくなればよいから

i) $z^2=1$ のとき $z=\pm 1$

ii) $z^3=z^2$ のとき $z^2(z-1)=0$ $\therefore z=0,1$

iii) $z^3=1$ のとき $(z-1)(z^2+z+1)=0$ $\therefore z=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

i)〜iii) より

$z=0,\ \pm 1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ //

(2) 3点が一直線上にあるとき

$$\frac{z^3-1}{z^2-1}=\frac{\cancel{(z-1)}(z^2+z+1)}{(z+1)\cancel{(z-1)}}$$

$$=\frac{z^2+z+1}{z+1}$$

$$=\frac{z(z+1)+1}{z+1}$$

$=z+\dfrac{1}{z+1}$ が実数となればよいから

$$\overline{z+\frac{1}{z+1}}=z+\frac{1}{z+1}$$

$$\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}+1}=z+\frac{1}{z+1}$$

$(z-\bar{z})(z+1)(\bar{z}+1)+(\bar{z}+1)-(z+1)=0$

$(z-\bar{z})\{z\bar{z}+z+\bar{z}\}=0$

$\therefore z=\bar{z},\ z\bar{z}+z+\bar{z}=0$

ここで

$z\bar{z}+z+\bar{z}=0$

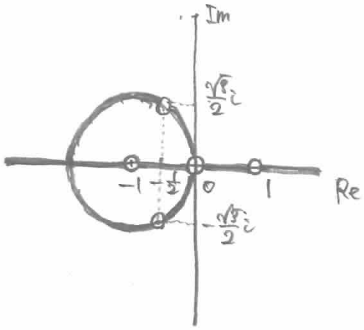
$(z+1)(\bar{z}+1)=1$

$(z+1)(\overline{z+1})=1$

$|z+1|^2=1$

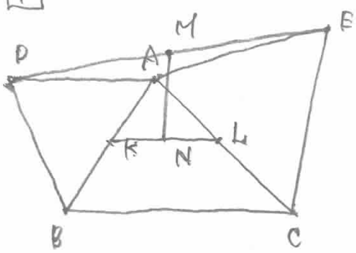
$\therefore |z+1|=1$

以上より




$z$の範囲は図の太線部
ただし白丸は除く//

7




Aを複素数平面上の原点におき
B$(\alpha)$, C$(\beta)$, N$(\gamma)$, M$(\delta)$とおく

$\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$が純虚数であることを示せばよい。

Kを表す複素数は $\frac{\alpha}{2}$

L　〃　$\frac{\beta}{2}$ より

$\gamma=\frac{\alpha+\beta}{4}$

Eを表す複素数は

$(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)\beta=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)\beta$

Dを表す複素数は

$(\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ))\alpha=(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)\alpha$ より

$\delta=\frac{\alpha+\beta}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}(\beta-\alpha)i$

よって

$\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{4}i$

したがって MN⊥BC ■

8

(1) $\alpha^2+\beta^2=\alpha\beta$

両辺$\beta^2$で割って

$(\frac{\alpha}{\beta})^2-(\frac{\alpha}{\beta})+1=0$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ //

(2) $\frac{\alpha}{\beta}=\cos(\pm 60^\circ)+i\sin(\pm 60^\circ)$ より

$|\frac{\alpha}{\beta}|=1$ より $|\alpha|=|\beta|$

$\arg\frac{\alpha}{\beta}=\pm 60^\circ$

よって△OABは正三角形

$|\alpha-\beta|=3$ であるから AB=3 より

OA=3 すなわち $|\alpha|=3$ //

[別解]

$|\alpha-\beta|=3$ より

$|\alpha-\beta|^2=9$

$|\alpha|^2-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+|\beta|^2=9$

両辺$\alpha\beta$をかけて

$\alpha\beta(|\alpha|^2+|\beta|^2)-\alpha^2|\beta|^2-|\alpha|^2\beta^2=9\alpha\beta$

$|\alpha|=|\beta|$ より

$2\alpha\beta|\alpha|^2-(\alpha^2+\beta^2)|\alpha|^2=9\alpha\beta$

$\alpha^2+\beta^2=\alpha\beta$ より

$|\alpha|^2=9$ ∴ $|\alpha|=3$ // (大きさ)

(3) △OABの面積Sは

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot \sin 60^\circ=\frac{9\sqrt{3}}{4}$$ //

$\boxed{9}$

(1) $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma=0$

$(\gamma-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2=0$

両辺 $(\beta-\alpha)^2$ で割って

$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2=-1$

∴ $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm i$ //

(2) $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos(\pm 90^\circ)+i\sin(\pm 90^\circ)$ より

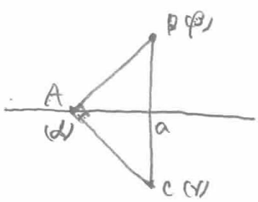
$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$ ∴ $|\gamma-\alpha|=|\beta-\alpha|$

(AB=AC)

$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm 90^\circ$

よって△ABCは∠BAC=90°の直角二等辺三角形は

(3) (2)より $x^3+kx+20=0$ は3つの実数解をもつことはないので1つの実数解と2つの共役な複素数解をもつ。またαが実数でないと仮定すると(2)に矛盾するのでαは実数である




$\beta=a+bi,\ \gamma=a-bi\ (a, b\in\mathbb{R})$ とおくと

解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+2a=0 \cdots ① \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=k \cdots ② \\ \alpha(a^2+b^2)=-20 \cdots ③\end{cases}$$

また $|b|=|a-\alpha|$ より

$\alpha(a^2+(a-\alpha)^2)=-20$

$\alpha(2a^2-2\alpha a+\alpha^2)=-20$

①から $a=-\frac{\alpha}{2}$ より

$\alpha\left(\frac{\alpha^2}{2}+\alpha^2+\alpha^2\right)=-20$

$\frac{5}{2}\alpha^3=-20$

$\alpha^3=-8$

$\alpha\in\mathbb{R}$ より $\alpha=-2$　$a=1$

$|b|=|1+2|=3$

よって

$\alpha=-2,\ \beta=1\pm 3i,\ \gamma=1\mp 3i$

(複号同順)

$k=\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma=-4+10=6$ //

[別解]

解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0 \cdots ① \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=k \cdots ② \\ \alpha\beta\gamma=-20 \cdots ③\end{cases}$$

$2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma=0$

$2\alpha^2+(\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0$

$2\alpha^2+(-\alpha)^2-2k=0$ (①より)

$3\alpha^2=2k$ ∴ $k=\frac{3}{2}\alpha^2 \cdots ④$

αは $x^3+kx+20=0$ の解より

$\alpha^3+\frac{3}{2}\alpha^3+20=0$

$\alpha^3+8=0$

$(\alpha+2)(\alpha^2-2\alpha+4)=0$ ∴ $\alpha=-2,\ 1\pm\sqrt{3}i$

$\alpha^2=4,\ -2\pm 2\sqrt{3}i$ と

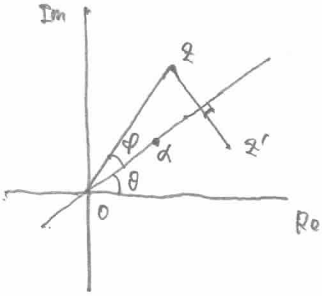
④と $k\in\mathbb{R}$ より $\alpha=-2$.

このとき

$$\begin{cases}\beta+\gamma=2\\ \beta\gamma=10\end{cases}$$

から $\beta, \gamma$ を求める

$\boxed{10}$




A(α)とする　$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ \left(\begin{smallmatrix}r>0\\ 0\leqq\theta<2\pi\end{smallmatrix}\right)$

OAと実軸のなす角をθとする

$z'$ は $z$ を

① まず原点を中心に $-\theta$ 回転して $(z_1)$

② 実軸に関して対称移動して $(z_2)$

③ 原点を中心に $\theta$ 回転したもの $(z')$

$$z_1=(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))z$$

$$\begin{aligned}z_2&=\overline{z_1}\\&=\overline{(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))z}\\&=\overline{(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))}\,\bar{z}\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)\bar{z}\\&=\frac{\alpha}{r}\bar{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z'&=(\cos\theta+i\sin\theta)z_2\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)\frac{\alpha}{r}\bar{z}\\&=\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2\bar{z}\end{aligned}$$

両辺に $\bar{\alpha}$ をかけて

$$\bar{\alpha}z'=\bar{\alpha}\cdot\frac{\alpha^2}{r^2}\bar{z}$$

$$\bar{\alpha}z'=\alpha\bar{z}\quad(\bar{\alpha}\alpha=|\alpha|^2=r^2)$$

逆に

$\bar{\alpha}z'=\alpha\bar{z}$ より

$$z'=\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\bar{z}\quad(\alpha\neq0)$$

$$\begin{aligned}|z'|&=\frac{|\alpha|}{|\bar{\alpha}|}|\bar{z}|\\&=|z|\quad(|\bar{\alpha}|=|\alpha|,\ |\bar{z}|=|z|)\end{aligned}$$

原点とzを通る直線と原点とαを通る直線のなす角をφとする

$$\begin{aligned}\arg z'&=\arg\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\bar{z}\\&=\arg\bar{z}+\arg\alpha-\arg\bar{\alpha}\\&=-(\theta+\varphi)+\theta-(-\theta)\\&=\theta-\varphi\end{aligned}$$

よって原点と $z'$ を通る直線のなす角もφとなり $|z'|=|z|$ と合わせて $z$ と $z'$ は原点とαを通る直線に関して対称である//.

$\boxed{11}$

$P_n(z_n)$ $(n=0,1,\cdots,10)$ とする.

$$z_1-z_0=1$$

$$z_2-z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)=\alpha$$

$$z_3-z_2=\alpha^2$$

$$\vdots$$

$$z_{10}-z_9=\alpha^9$$

これらをすべて足して

$$\begin{aligned}z_{10}-z_0&=1+\alpha+\cdots+\alpha^9\\&=\frac{\alpha^{10}-1}{\alpha-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^{10}&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)^{10}\\&=\frac{1}{32}(\cos450^\circ+i\sin450^\circ)=\frac{i}{32}\end{aligned}$$ より

$$z_{10}=\frac{\frac{1}{32}i-1}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{33}{32}+\frac{31}{32}i\ //$$