

高9 数学Ⅱ 2. 複素数平面と図形④

[I]

$$|z-1| = |z+i| \text{ より}$$

$$|z-1|^2 = |z+i|^2$$

$$(z-1)(\overline{z-1}) = (z+i)(\overline{z+i})$$

$$(z-1)(\overline{z}-1) = (z+i)(\overline{z}-i)$$

$$z\overline{z} - z - \overline{z} + 1 = z\overline{z} - i\overline{z} + i\overline{z} + 1$$

$$(z+i) - i(\overline{z}-i) = 0$$

ここで $z = x + yi$ に代入して

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i} \text{ より}$$

$$2x + 2y = 0 \quad \therefore y = -x \dots ①$$

$$2|z-i| = |z+2i| \text{ より}$$

$$4|z-i|^2 = |z+2i|^2$$

$$4(z-i)(\overline{z}+i) = (z+2i)(\overline{z}-2i)$$

$$4\{z\overline{z} + i\overline{z} - i\overline{z} + 1\} = z\overline{z} - 2i\overline{z} + 2i\overline{z} + 4$$

$$3z\overline{z} + 6i\overline{z} - 6i\overline{z} = 0$$

$$z\overline{z} + 2i\overline{z} - 2i\overline{z} = 0$$

$$(z-2i)(\overline{z}+2i) = 4$$

$$(z-2i)(\overline{z}-2i) = 4$$

$$|z-2i|^2 = 4 \quad \therefore |z-2i| = 2$$

$z = x + yi$ に代入して

$$x^2 + (y-2)^2 = 4 \dots ②$$

①, ② をともに満たすとき

$$x^2 + (x+2)^2 = 4$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$x(x+2) = 0 \quad \therefore x = 0, -2.$$

$$\therefore (x, y) = (0, 0), (-2, 2)$$

よって求める z は

$$z = 0, -2+2i$$

[別解]

$$|z-1|^2 = |z+i|^2$$

$$(1-i)z + (1+i)\overline{z} = 0$$

$$(1+i)\overline{z} = -(1-i)z$$

$$\overline{z} = -\frac{1-i}{1+i}z \quad \therefore \overline{z} = iz$$

これを

$$2z + 2iz - 2iz = 0 \text{ に代入して}$$

[別解]

$$|z-1| = |z+i|$$

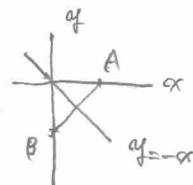
$A(1), B(-i), P(z)$ とすると

$$AP = BP = 1 \text{ より}$$

P は線分 AB の垂直二等分線上を動く。

から $z = x + yi$ に代入して

$$y = -x$$



$$2|z-i| = |z+2i|$$

$A(i), B(-2i), Q(z)$ とすると

$$AQ = BQ = 2 \text{ より}$$

Q は AB を $1:2$ に内分・外分する点を

直径の両端とする円を描く (Ptolemy's theorem)

あとは $z = x + yi$ に代入し (1) の方程式を求め、

交点を求めればよい。

<point>

① 複素数平面上の直線 (1)

② 複素数平面上の (1) の方程式

$$|z-\alpha| = r$$

$P(z)$ は中心 α 、半径 r の円周

を描く。

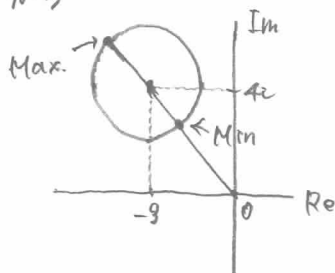
[2]

$$|z + 9 - 4i| = 2$$

$$|z - (-9 + 4i)| = 2$$

これは複素数平面上で、中心が $-9 + 4i$ 、半径が 2 の円周を描く。

$|z|$ は z と 0 (原点) との距離を表すから



$$|z| \text{ の最大値は } 5 + 2 = 7$$

$$\text{小 } 5 - 2 = 3$$

[3]

$z = x + yi$ に対して $a, b, c \in \mathbb{R}$

z は直線 $ax + by + c = 0$ ($c \neq 0$) 上を動くとする

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \text{ より}$$

$$a \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} + b \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} + c = 0$$

$$a(z + \bar{z}) - bi(z - \bar{z}) + 2c = 0$$

$$(a - bi)z + (a + bi)\bar{z} + 2c = 0$$

$$\frac{a - bi}{2c}z + \frac{a + bi}{2c}\bar{z} + 1 = 0$$

$$d = \frac{a + bi}{2c} \text{ とおくと } \bar{d} = \frac{a - bi}{2c} \text{ より}$$

$$\bar{d}z + d\bar{z} + 1 = 0$$

[4]

① 中心が d 、半径 $|d|$ の円より

$$|z - d| = |d|$$

$$|z - d|^2 = |d|^2$$

$$(z - d)(\bar{z} - \bar{d}) = d\bar{d}$$

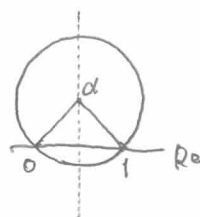
$$(z - d)(\bar{z} - \bar{d}) = d\bar{d}$$

$$z\bar{z} - d\bar{z} - \bar{d}z + d\bar{d} = d\bar{d}$$

$$\therefore z\bar{z} = d\bar{z} + \bar{d}z \quad \square$$

$$\textcircled{2} |d| = |d - 1|$$

より d は複素数平面上で 0 と 1 を結ぶ線分の垂直二等分線に属する。



③ $z = 0$ を通るから ① より

$$z\bar{z} = d\bar{z} + \bar{d}z$$

$z = \beta$ を通るから

$$\beta\bar{\beta} = d\bar{\beta} + \bar{d}\beta \quad \textcircled{1}$$

$z = 0, 1$ を通るから ② より

$$|d| = |d - 1|$$

$$d\bar{d} = (d - 1)(\bar{d} - \bar{1})$$

$$d\bar{d} = (d - 1)(\bar{d} - 1)$$

$$\bar{d}\bar{d} = \bar{d}\bar{d} - \bar{d} - \bar{d} + 1$$

$$\therefore \bar{d} = 1 - d \quad \textcircled{2}$$

①, ② より

$$\beta\bar{\beta} = d\bar{\beta} + (1 - d)\beta$$

$$(\beta - \bar{\beta})d = \beta(1 - \bar{\beta}) \quad \beta \text{ は定数で } \beta \neq 0$$

$$\therefore d = \frac{\beta(1 - \bar{\beta})}{\beta - \bar{\beta}} \quad (\beta - \bar{\beta} \neq 0)$$

よって円方程式より

$$\left| z - \frac{\beta(1 - \bar{\beta})}{\beta - \bar{\beta}} \right| = \left| \frac{\beta(1 - \bar{\beta})}{\beta - \bar{\beta}} \right|$$

5

(1) w が実数となるとき

$$\bar{w} = w$$

$$\overline{z + \frac{1}{z}} = z + \frac{1}{z}$$

$$\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} = z + \frac{1}{z}$$

両辺 $z\bar{z}$ をかけると

$$|z|^2 z + z = |z|^2 \bar{z} + \bar{z}$$

$$|z|^2(z - \bar{z}) - (z - \bar{z}) = 0$$

$$(|z|^2 - 1)(z - \bar{z}) = 0$$

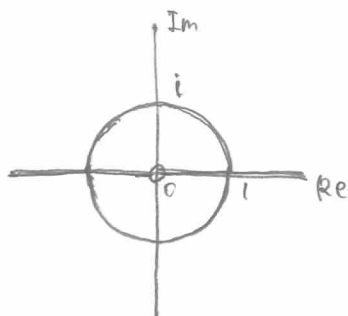
$$\therefore |z|^2 - 1 = 0 \text{ or } z - \bar{z} = 0$$

$$\therefore |z| = 1 \text{ or } \bar{z} = z$$

よって z は実数 ($z \neq 0$) または

中心 0 半径 1 の円周上の

点である。



(2) (i) z が実数 z のとき ($z \neq 0$)

$$1 \leq z + \frac{1}{z} \leq \frac{10}{9}$$

$$\textcircled{1} z + \frac{1}{z} \geq 1$$

$$z^2 - z^2 + z \geq 0$$

$$z(z^2 - z^2 + 1) \geq 0$$

$$z^2 - z^2 + 1 = (z - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ より}$$

$$z \geq 0$$

$$\textcircled{2} z + \frac{1}{z} \leq \frac{10}{9}$$

$$\frac{1}{9}x - 1$$

$$9z^2 - 10z^2 + 9z \leq 0$$

$$z(z-3)(3z-1) \leq 0$$

$$\therefore z \leq 0, \frac{1}{9} \leq z \leq 3$$



よって

$$\frac{1}{9} \leq z \leq 3$$

(ii) $|z| = 1$ のとき

$$|z|^2 = 1$$

$$z\bar{z} = 1 \quad \therefore \bar{z} = \frac{1}{z} \text{ より}$$

$$1 \leq z + \bar{z} \leq \frac{10}{9}$$

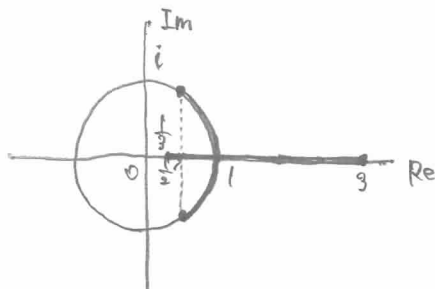
$$\frac{1}{2} \leq \frac{z + \bar{z}}{2} \leq \frac{5}{9}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{5}{9}$$

よって (i) より

$$\frac{1}{9} \leq z \leq 3 \text{ または } \leftarrow \text{ 不十分で表している } \leftarrow \text{ 時点で } z \text{ は実数ということ}$$

$$|z| = 1 \quad \left(\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \right)$$



6

$$a + \beta i = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$= z \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i}$$

$$= z \cdot \frac{(-1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)}{1^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$= 1 + \sqrt{3}i$$

$$a, \beta \in \mathbb{R} \text{ より } a = 1, \beta = \sqrt{3}$$

$$z \text{ が } |z - (\sqrt{3} - i)| = 1 \text{ 上を動くとき}$$

$$w \text{ は } w = \alpha z \text{ であるから } z = \frac{w}{\alpha} \text{ より}$$

$$\left| \frac{w}{\alpha} - (\sqrt{3} - i) \right| = 1$$

$$\frac{|w - (\sqrt{3} - i)\alpha|}{|\alpha|} = 1$$

$$|w - (\sqrt{3} - i)\alpha| = |\alpha|$$

ここで

$$(\sqrt{3} - i)\alpha = (\sqrt{3} - i)(1 + \sqrt{3}i) \\ = 2\sqrt{3} + 2i$$

$$|\alpha| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

より

$$|w - (2\sqrt{3} + 2i)| = 2$$

よって w は

$(2\sqrt{3} + 2i)$ を中心とする半径 2 の円周上の点

[別解]

$$w = \alpha z$$

$$\alpha = 1 + \sqrt{3}i$$

$$= 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \text{ より}$$

w は z を原点を中心に 60° 回転し

2 倍したものを

と見て求める

<point>

① 複素数平面上の変換

$$w = \alpha z + \beta \quad (1 \text{ 次})$$

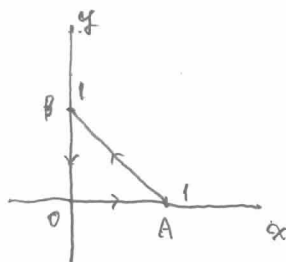
注

変換とは 平面 $\rightarrow$ 平面 (空間 $\rightarrow$ 空間) の間で点を対応させる規則のこと

変換は 直線 $\rightarrow$ 直線の間に点を対応させる規則のことであるからその高次元の場合も同様である



[7]



$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とする

$$w = z^2$$

$$= (x + yi)^2$$

$$= x^2 - y^2 + 2xyi$$

$w = x' + y'i$ ($x', y' \in \mathbb{R}$) とすると

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$$

i) $O \rightarrow A$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$\begin{cases} x' = t^2 \\ y' = 0 \end{cases}$$

$$y' = 0 \quad (0 \leq x' \leq 1)$$

ii) $A \rightarrow B$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$\begin{cases} x' = t^2 - (1 - t)^2 = 2t - 1 \dots ① \\ y' = 2t(1 - t) = -2t^2 + 2t \end{cases}$$

$$= -2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \dots ②$$

① より

$$t = \frac{x' + 1}{2}$$

② より

$$y' = -2\left(\frac{x' + 1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2} \quad (-1 \leq x' \leq 1)$$

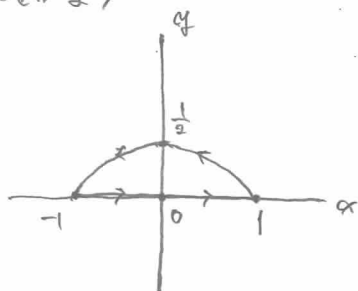
$$\text{iv) } \beta \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=t \quad (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=-t^2 \\ y'=0 \end{cases}$$

$$y'=0 \quad (-1 \leq x \leq 0)$$

d) ~ iii) より



<point>

① 複素数平面上の写像

$$w = \alpha z^2 + \beta z + \gamma \quad (z \in \mathbb{C})$$

8

d) L 上

$$|z| = |z - \alpha|$$

$$|z|^2 = |z - \alpha|^2$$

$$z\bar{z} = (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha})$$

$$z\bar{z} = (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha})$$

$$z\bar{z} = z\bar{z} - \alpha\bar{z} - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha}$$

$$\therefore \alpha\bar{z} + \alpha\bar{z} - \alpha\bar{\alpha} = 0$$

$$w = \frac{1}{z} \quad \text{と、} z \neq 0 \text{ かつ } z = \frac{1}{w} \text{ より } (w \neq 0)$$

$$\alpha \cdot \frac{1}{w} + \alpha \cdot \frac{1}{w} - \alpha\bar{\alpha} = 0$$

$$\text{両辺に } \frac{w\bar{w}}{\alpha\bar{\alpha}} \text{ をかけると}$$

$$\frac{\bar{w}}{\alpha} + \frac{w}{\bar{\alpha}} - w\bar{w} = 0$$

$$w\bar{w} - \frac{w}{\bar{\alpha}} - \frac{\bar{w}}{\alpha} = 0$$

$$(w - \frac{1}{\alpha})(\bar{w} - \frac{1}{\bar{\alpha}}) = \frac{1}{\alpha\bar{\alpha}}$$

$$(w - \frac{1}{\alpha})(\bar{w} - \frac{1}{\bar{\alpha}}) = \frac{1}{|\alpha|^2}$$

$$|w - \frac{1}{\alpha}|^2 = \frac{1}{|\alpha|^2}$$

$$\therefore |w - \frac{1}{\alpha}| = \frac{1}{|\alpha|} \quad (w \neq 0)$$

$$\therefore \tau \text{ 中、} \frac{1}{\alpha} \text{ を } \frac{1}{|\alpha|} \text{ だけ}$$

$$\text{② } z^2 = 1$$

$$z^2 - 1 = 0$$

$$(z-1)(z+1) = 0$$

$$\therefore z = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ より } \beta = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\beta^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

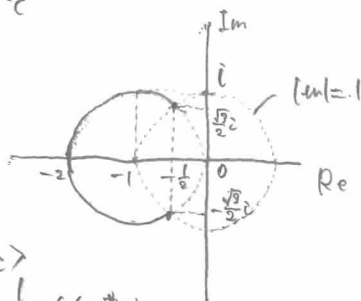
β と β^2 を複素平面上に描く

0 と -1 の垂直二等分線の $|z| \leq 1$ の部分より

$$|w+1| = 1, w \neq 0 \text{ かつ}$$

$$|\frac{1}{w}| \leq 1 \quad \therefore |w| \geq 1$$

よって



<point>

$$\text{① } w = \frac{1}{z} \quad (\text{分母} \neq 0)$$

9

$$\text{d) } OP \cdot OQ = 1 \text{ より}$$

$$|z||w| = 1 \dots \text{①} \quad (z, w \neq 0)$$

$$\vec{OQ} = k \vec{OP} \quad (k \geq 0, k \in \mathbb{R}) \text{ より}$$

$$w = k z \dots \text{②}$$

$$\text{② より}$$

$$|w| = |kz|$$

$$|w| = k|z| \quad \therefore k = \frac{|w|}{|z|}$$

$$\text{① より } k = \frac{1}{|z|^2}$$

よって

$$w = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$$

$$\therefore z = \frac{1}{\bar{w}} \leftarrow \begin{array}{l} \text{これはわかる} \\ z = \frac{1}{w} \text{ と } z = \frac{1}{\bar{w}} \text{ とは } \\ \text{ふたつ } w = \frac{1}{z} \text{ と } \\ \text{ふたつ } w = \frac{1}{\bar{z}} \text{ と } \\ \text{ふたつ } w = \frac{1}{z} \text{ と } \\ \text{ふたつ } w = \frac{1}{\bar{z}} \text{ と } \end{array}$$

$$(a) \alpha = 1-i \text{ とおく}$$

$$|z - \alpha| = \sqrt{2} \quad (z \neq 0)$$

$$\left| \frac{1}{w} - \alpha \right| = \sqrt{2}$$

$$|\alpha \bar{w} - 1| = \sqrt{2} |\bar{w}|$$

$$|\alpha \bar{w} - 1|^2 = 2 |\bar{w}|^2$$

$$(\alpha \bar{w} - 1)(\bar{\alpha} w - 1) = 2 w \bar{w}$$

$$|\alpha|^2 w \bar{w} - \alpha \bar{w} - \bar{\alpha} w + 1 = 2 w \bar{w}$$

$$|\alpha|^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2 \text{ より}$$

$$\alpha \bar{w} + \bar{\alpha} w - 1 = 0$$

$$(1-i) \bar{w} + (1+i) w - 1 = 0$$

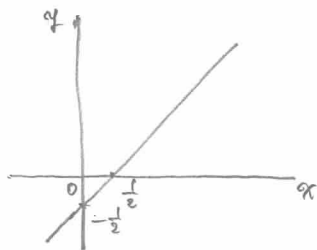
$$\therefore (w + \bar{w}) + (w - \bar{w})i - 1 = 0$$

$$w = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}) \text{ とすると}$$

$$x = \frac{w + \bar{w}}{2}, \quad y = \frac{w - \bar{w}}{2i} \text{ より}$$

$$2x - 2y - 1 = 0$$

$$\therefore y = x - \frac{1}{2}$$



$$(b) |z - \beta| = r \quad (\beta \text{ 点 } z \text{ を含む } r > 0)$$

$$\left| \frac{1}{w} - \beta \right| = r$$

$$|\beta \bar{w} - 1| = r |\bar{w}|$$

$$|\beta \bar{w} - 1|^2 = r^2 |\bar{w}|^2$$

$$(\beta \bar{w} - 1)(\bar{\beta} w - 1) = r^2 w \bar{w}$$

$$(|\beta|^2 - r^2) w \bar{w} - \beta \bar{w} - \bar{\beta} w + 1 = 0$$

$$w \bar{w} - \frac{\beta}{|\beta|^2 - r^2} \bar{w} - \frac{\bar{\beta}}{|\beta|^2 - r^2} w + \frac{1}{|\beta|^2 - r^2} = 0$$

$$\left(w - \frac{\beta}{|\beta|^2 - r^2} \right) \left(\bar{w} - \frac{\bar{\beta}}{|\beta|^2 - r^2} \right) - \frac{|\beta|^2}{(|\beta|^2 - r^2)^2} + \frac{1}{|\beta|^2 - r^2} = 0$$

$$\left| w - \frac{\beta}{|\beta|^2 - r^2} \right|^2 = \frac{r^2}{(|\beta|^2 - r^2)^2}$$

$$\therefore \left| w - \frac{\beta}{|\beta|^2 - r^2} \right| = \frac{r}{|\beta|^2 - r^2}$$

$$\therefore z \text{ の } \beta \text{ を中心とする } \frac{\beta}{|\beta|^2 - r^2} \text{ 上の}$$

$$\text{半径 } \frac{r}{|\beta|^2 - r^2} \text{ の円 (点 } z \text{ を含む) 上の点である。}$$

<point>

$$(1) \text{ 反転 } w = \frac{1}{z}$$

[10]

$$(1) \text{ 虚軸由は } \bar{z} = -z \text{ と表せる。}$$

$$w = \frac{z+i}{z+1} \text{ より}$$

$$(z+1)w = z+i$$

$$(w-1)z = -w+i$$

$$w=1 \text{ のとき 左辺}=0, \text{ 右辺}=-1+i \text{ より}$$

$$w \neq 1, \text{ このとき}$$

$$z = \frac{-w+i}{w-1}$$

$$\bar{z} = -z \text{ より}$$

$$\overline{\left(\frac{-w+i}{w-1} \right)} = - \frac{-w+i}{w-1}$$

$$- \frac{\bar{w}+i}{\bar{w}-1} = \frac{w-i}{w-1}$$

$$(w-1)(\bar{w}+i) = -(w-i)(\bar{w}-1)$$

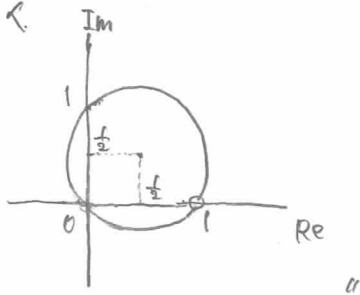
$$w\bar{w} + iw - \bar{w} - i = -w\bar{w} + w + i\bar{w} - i$$

$$w\bar{w} - \frac{1-i}{2} w - \frac{1+i}{2} \bar{w} = 0$$

$$\left(w - \frac{1+i}{2} \right) \left(\bar{w} - \frac{1-i}{2} \right) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore \left| w - \frac{1+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (w \neq 1)$$

よって u は中心 $\frac{1+i}{2}$, 半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の
円 (ただし $u=1$ は除く) の周上を
動く。

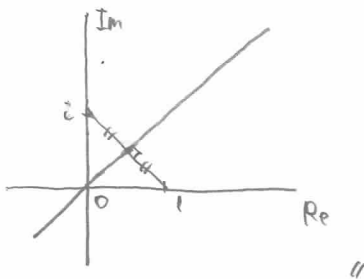


④ 原点を中心とし半径1の円は
 $|z|=1$ と表せる。

$$\left| \frac{-u+i}{u-1} \right| = 1$$

$$|u-i| = |u-1|$$

u は1と*i*を両端とする線分の
垂直二等分線上の点より



<point>

① 1次分枝変換

□□

$$q) z = u + \frac{2}{u}$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta + 2(\cos \theta - i \sin \theta)$$

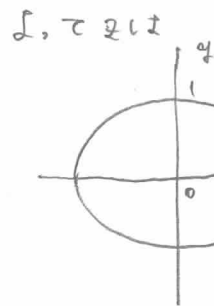
$$= 3 \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\therefore x = 3 \cos \theta, y = -\sin \theta$$

$$e) \cos \theta = \frac{x}{3}, \sin \theta = -y$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$



図のたいへんを動かす。

x 軸方向に $\frac{1}{3}$ 倍に縮小するのなら

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x & (x = 3x') \\ y' = y & \text{とおく} \end{cases}$$

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

この円の面積は π であり

もとのたいへんはこの円を x 軸方向に
3倍に拡大したものであるから
面積も3倍で求める面積は

$$3\pi$$

<point>

① ジューゴフスキー変換

注

$u = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) は複素平面上で
中心が0, 半径が1の円を表している。

本問は $z = u + \frac{2}{u}$ でこの円かともうな
図形にうつる p を求めている。

補足

⑨

$$⑨) (1-i)\bar{w} + (1+i)w - 1 = 0$$

$$(1+i)w + \overline{(1+i)\bar{w}} = 1$$

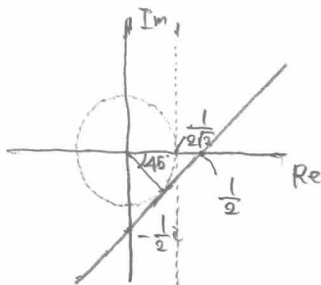
$$(1+i)w + (1+i)\bar{w} = 1$$

$$2 \operatorname{Re}\{(1+i)w\} = 1$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)w\right\} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Re}\{(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)w\} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

これは w を 45° 回転させたものの
の実部が $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ということを表して
いるので w はこれを -45° 回転
したもので



//