高3 数学α 3. 2次曲線(1)

$\boxed{1}$

(A)より C_1 は

$x^2=-4y$ ∴ $y=-\frac{1}{4}x^2$

C_2 の準線を $x=a$ とおくと

$y^2=4ax$ …①

C_1 と $y=-2x$ の交点は

$-\frac{1}{4}x^2=-2x$

$x^2-8x=0$

$x(x-8)=0$ ∴ $x=0, 8$

∴ $(0, 0), (8, -16)$

①は $(8, -16)$ を通るから

$256=32a$ ∴ $a=8$

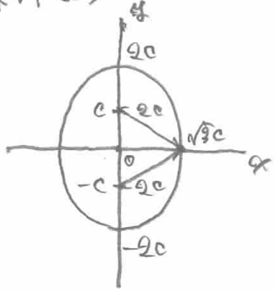
よって C_2 の準線は $x=8$ //

<point>

① 放物線

$\boxed{2}$

条件より



焦点は長軸上にあり

2焦点からの距離の和が $4c$ となるから

$$\frac{x^2}{(\sqrt{3}c)^2}+\frac{y^2}{(2c)^2}=1$$

とおける

$(3, 2)$ を通るから

$$\frac{3}{c^2}+\frac{1}{c^2}=1$$

$c^2=4$

$c>0$ より $c=2$

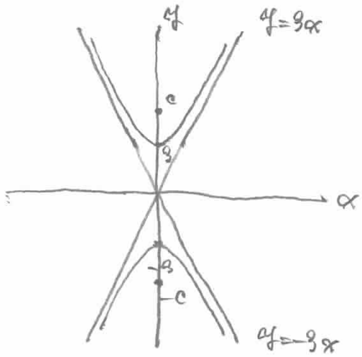
よって短軸の長さは $4\sqrt{3}$ //

<point>

① だ円

$\boxed{3}$

条件より



焦点は y 軸上にあるから

焦点を $(0, \pm c)$ $(c>0)$ とおくと

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3^2}=-1,\quad a^2+3^2=c^2 \quad (a>0)$$

漸近線が $y=\pm 3x$ より

$\frac{3}{a}=3$ ∴ $a=1$

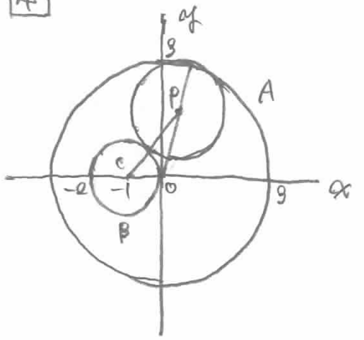
よって $c=\sqrt{10}$

したがって2焦点間の距離は $2\sqrt{10}$ //

<point>

① 双曲線

$\boxed{4}$



円Aに内接し、円Bに外接する円の中心をP(X, Y)とし半径をrとする

円Aに内接するから

$\sqrt{X^2+Y^2}=3-r$ …①

円Bに外接するから

$\sqrt{(X+1)^2+Y^2}=1+r$ …②

①+②より

$$\underbrace{\sqrt{X^2+Y^2}}_{OP}+\underbrace{\sqrt{(X+1)^2+Y^2}}_{CP}=\underbrace{4}_{(一定)}$$

$$\sqrt{(X+1)^2+Y^2}=4-\sqrt{X^2+Y^2}$$

$$(X+1)^2+Y^2=16-8\sqrt{X^2+Y^2}+X^2+Y^2 \qquad X^2+Y^2\leqq 16$$

$$8\sqrt{X^2+Y^2}=15-2X$$

$$64(X^2+Y^2)=225-60X+4X^2$$

$$60X^2+60X+64Y^2=225$$

$$60\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+64Y^2=240$$

$$\frac{\left(X+\frac{1}{2}\right)^2}{4}+\frac{Y^2}{\frac{15}{4}}=1$$

求める軌跡は

だ円 $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{15}{4}}=1$ //

[別解]

OP+CP=4(一定)よりPは焦点がC(−1, 0), O(0, 0)のだ円を描く。2焦点からの距離の和が4より求める。

$\boxed{5}$

(x, y)を原点を中心に30°回転した点を(x', y')とすると

(x, y)は(x', y')を原点を中心に−30°回転した点より

$$x+yi=(\cos(-30°)+i\sin(-30°))(x'+y'i)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)(x'+y'i)$$

$$=\frac{\sqrt{3}x'+y'}{2}+\frac{-x'+\sqrt{3}y'}{2}i$$

$x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ より

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}x'+y'}{2} \\ y=\dfrac{-x'+\sqrt{3}y'}{2} \end{cases}$$

$3x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2=1$ を原点を中心に30°回転すると

$$3\left(\frac{\sqrt{3}x'+y'}{2}\right)^2+2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}x'+y'}{2}\cdot\frac{-x'+\sqrt{3}y'}{2}+5\left(\frac{-x'+\sqrt{3}y'}{2}\right)^2=1$$

$$3(3x'^2+2\sqrt{3}x'y'+y'^2)+2\sqrt{3}(-\sqrt{3}x'^2+2x'y'+\sqrt{3}y'^2)+5(x'^2-2\sqrt{3}x'y'+3y'^2)=4$$

$$8x'^2+24y'^2=4$$

∴ $\boxed{2}x^2+\boxed{0}xy+\boxed{6}y^2=1$ (だ円)

もとの曲線は $\boxed{\text{だ円}}$

<point>

① 2次曲線の回転移動。

6

(1) lとEが接するとき

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(x-k)^2}{4}=1$$

$$4x^2+9(x-k)^2=36$$

$$13x^2-18kx+9k^2-36=0 \quad \cdots ①$$

が重解をもてばよいから

判別式をDとして

$$D/4=81k^2-13(9k^2-36)=0$$

$$36k^2=36\cdot 13$$

$$k^2=13 \qquad \therefore k=\pm\sqrt{13}$$

(2) ①が異なる2実解をもてばよいから

$$D/4=-36(k^2-13)>0$$

$$k^2-13<0 \qquad \therefore -\sqrt{13}<k<\sqrt{13}$$

(3) $P(X, Y)$とする

①の2解をα, βとすると

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{18}{13}k \\ \alpha\beta=\dfrac{9k^2-36}{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{9}{13}k \\ Y=\dfrac{(\alpha-k)+(\beta-k)}{2}=-\dfrac{4}{13}k \end{cases}$$

$$Y=-\frac{4}{9}X$$

$-\sqrt{13}<k<\sqrt{13}$ より

$$-\frac{9\sqrt{13}}{13}<X<\frac{9\sqrt{13}}{13}$$

よって求める軌跡は

直線 $y=-\dfrac{4}{9}x$ の $-\dfrac{9\sqrt{13}}{13}<x<\dfrac{9\sqrt{13}}{13}$

の部分

[別解]

(1) Eとlをy軸方向に$\dfrac{3}{2}$倍に拡大すると

$$\begin{cases} x'=x & \therefore x=x' \\ y'=\dfrac{3}{2}y & \therefore y=\dfrac{2}{3}y' \end{cases}$$

Eは

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{\frac{4}{9}y'^2}{4}=1$$

$$\therefore x'^2+y'^2=9 \cdots E' \quad \leftarrow \text{補助円という}$$

lは

$$x'-\frac{2}{3}y'=k$$

$$3x'-2y'-3k=0 \cdots l'$$

Eとlが接するときE'とl'も接するから

$$\frac{|-3k|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=3$$

$$3|k|=3\sqrt{13} \qquad \therefore k=\pm\sqrt{13}$$

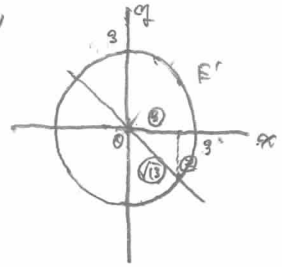
(2) 同様に

$$\frac{|-3k|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}<3$$

$$3|k|<3\sqrt{13}$$

$$|k|<\sqrt{13} \qquad \therefore -\sqrt{13}<k<\sqrt{13}$$

(3)



E'とl'の2交点の中心は2交点を結んだ線分の垂直二等分線

$$y=-\frac{2}{3}x \quad \left(-\frac{9}{\sqrt{13}}<x<\frac{9}{\sqrt{13}}\right)$$ もとにもどす

これをy軸方向に$\dfrac{2}{3}$倍に拡大(縮小)して

$$y=-\frac{4}{9}x \quad \left(-\frac{9\sqrt{13}}{13}<x<\frac{9\sqrt{13}}{13}\right)$$

<point>

① 円・だ円変換

$\boxed{7}$

(1) lとHが共有点を2個もつとき

$$\frac{x^2}{9}-\frac{\{m(x-2)\}^2}{4}=1$$

$$4x^2-9m^2(x^2-4x+4)=36$$

$$(4-9m^2)x^2+36m^2x-36m^2-36=0 \quad \cdots①$$

が異なる2実解をもてばよい。

$4-9m^2=0$のとき異なる2実解をもつことはないので$4-9m^2\neq 0$

判別式をDとして

$$D/4=18^2m^4+36(4-9m^2)(m^2+1)>0$$

$$9m^4+(4-9m^2)(m^2+1)>0$$

$$-5m^2+4>0$$

$$m^2<\frac{4}{5} \qquad \therefore -\frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$m\neq\pm\frac{2}{3}$より

$$-\frac{2\sqrt{5}}{5}<m<-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}<m<\frac{2\sqrt{5}}{5} \,/\!/$$

(2) ①が$x<0$, $x>0$に1つずつ解をもてばよいから

①の2解をα, βとおくと

$$\alpha\beta<0$$

$$\frac{36m^2+36}{9m^2-4}<0 \quad (解と係数の関係)$$

$36m^2+36>0$より

$$9m^2-4<0 \qquad \therefore -\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3} \,/\!/$$

(3) $M(X, Y)$とおくと

$$\begin{cases} X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{18m^2}{9m^2-4} \quad \cdots① \\ Y=\dfrac{m(\alpha-2)+m(\beta-2)}{2}=\dfrac{18m^3}{9m^2-4}-2m \\ \quad =\dfrac{8m}{9m^2-4} \quad \cdots② \end{cases}$$

①, ②より

$Y=0$のとき$m=0$より$X=0$.

$Y\neq 0$のとき

$$\frac{X}{Y}=\frac{9}{4}m \qquad \therefore m=\frac{4X}{9Y}$$

②より

$$Y=\frac{\frac{32X}{9Y}}{\frac{16X^2}{9Y^2}-4}$$

$$Y=\frac{32XY}{16X^2-36Y^2}$$

$$16X^2-32X-36Y^2=0$$

$$16(X-1)^2-36Y^2=16$$

$$\therefore (X-1)^2-\frac{9}{4}Y^2=1 \quad ((X, Y)\neq(0, 0))$$

よって

$$(x-1)^2-\frac{9}{4}y^2=1 \,/\!/$$

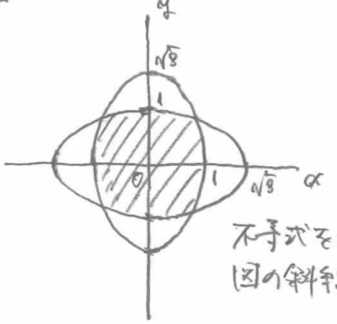
(4) $x^2-\dfrac{y^2}{\frac{4}{9}}=1$の焦点は

$$\left(\pm\sqrt{1+\frac{4}{9}},\ 0\right)=\left(\pm\frac{\sqrt{13}}{3},\ 0\right)$$

Cはこの双曲線をx軸方向に1だけ平行移動したものより焦点は

$$\left(1\pm\frac{\sqrt{13}}{3},\ 0\right) /\!/$$

8



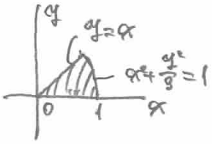
不等式を満たす領域は図の斜線部(境界含む)

$x^2+\frac{y^2}{3}=1$ と $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ は

x軸, y軸, 原点, $y=x$ 対称より

図の斜線部の面積 S は

$S=8\times$

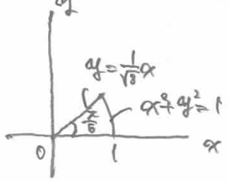


y軸方向に $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍すると

$$\begin{cases} x'=x & \therefore x=x' \\ y'=\frac{1}{\sqrt{3}}y & \therefore y=\sqrt{3}y' \end{cases}$$

$x^2+\frac{y^2}{3}=1$ は $x'^2+y'^2=1$

$y=x$ は $y'=\frac{1}{\sqrt{3}}x'$



図の扇形の面積は $\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$

y軸方向に $\sqrt{3}$ 倍すると $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ ← もとにもどす

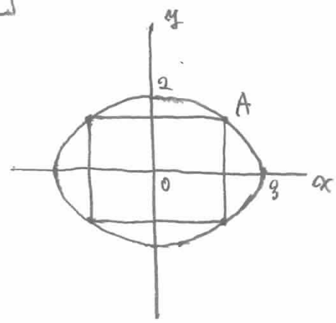
よって

$$S=8\cdot\frac{\sqrt{3}\pi}{12}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

注.

積分でもできるが、円・だけ変換でやった方が楽.

9



図のように第1象限にある頂点をAとすると

$A(3\cos\theta,\ 2\sin\theta)\quad(0^\circ<\theta<90^\circ)$

とおける

内接四角形が正方形のとき

$3\cos\theta=2\sin\theta$

$\tan\theta=\frac{3}{2}$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$

よって正方形の1辺の長さは

$$2\times\frac{6}{\sqrt{13}}=\boxed{\frac{12\sqrt{13}}{13}}$$

内接する長方形の面積 S は

$S=6\cos\theta\cdot4\sin\theta\quad(0^\circ<\theta<90^\circ)$

$=12\sin2\theta$

$\theta=45^\circ$ のとき最大で最大値は

$S=\boxed{12}$

[別解]

$A\left(x,\ 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\right)$ として処理してもよい

最初の□ $x=2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$ を解く

最後の□ $S=2x\cdot2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$

$=4\sqrt{x^2\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}$ $t=x^2$ とおく

<point>

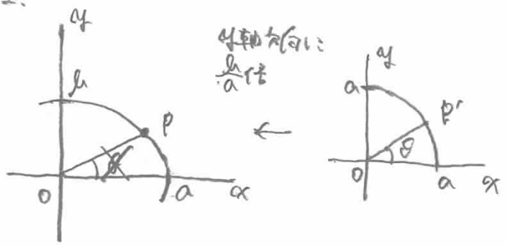
① だ円の媒介変数表示

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点は

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \quad (0\leqq\theta<2\pi) \end{cases}$$

とおける

注.



θは x軸正方向と動径 OP のなす角ではない。だ円の媒介変数は補助円 $x^2+y^2=a^2$ (or $x^2+y^2=b^2$) から1次変換を経て得られるが θはその補助円のときのもの。

$\boxed{10}$

(1) $x=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$=\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$

$=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}$

$=\cos\theta$

$y=\dfrac{6\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$=\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot 6\tan\frac{\theta}{2}$

$=6\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$=3\sin\theta$ //

(2) (1) より

$$\begin{cases} \cos\theta=x \\ \sin\theta=\dfrac{y}{3} \end{cases}$$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より

$x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$

よって (x, y) はだ円 $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上にある

$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{-(1+t^2)+2}{1+t^2}=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$

$t: -\infty \longrightarrow 0 \longrightarrow \infty$

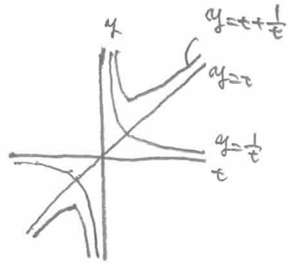
$x: -1 \xrightarrow{\text{増加}} 1 \xrightarrow{\text{減少}} -1$

$y=\dfrac{6t}{1+t^2}$

$t=0$ のとき $y=0$

$t\neq 0$ のとき

$y=\dfrac{6}{t+\frac{1}{t}}$



$t>0$ のとき

$t+\dfrac{1}{t}\geqq 2$ 等号成立は $t=1$ のとき

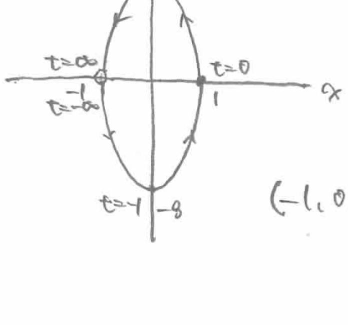
$t<0$ のとき

$\underset{\substack{t=-s\\(s>0)}}{t+\dfrac{1}{t}}=-\left(s+\dfrac{1}{s}\right)\leqq -2.$

等号成立は $t=-1$ のとき

$t: -\infty \longrightarrow -1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \infty$

$y: 0 \xrightarrow{\text{減}} -3 \xrightarrow{\text{増}} 0 \xrightarrow{\text{増}} 3 \xrightarrow{\text{減}} 0$



$(-1, 0)$ は除く //

11

$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上の点Pにおける接線は

$$\frac{x}{4\cos\theta}-\frac{\tan\theta}{3}y=1$$

$$\frac{\tan\theta}{3}y=\frac{x}{4\cos\theta}-1$$

$$\therefore y=\boxed{\frac{3}{4\sin\theta}}x-\frac{3}{\tan\theta}$$

$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ の焦点は $(\pm5,0)$ F$(5,0)$

OFの中点は $\left(\dfrac{5}{2},0\right)$

Pにおける接線が $\left(\dfrac{5}{2},0\right)$ を通るとき

$$\frac{5}{8\cos\theta}=1 \quad \therefore \cos\theta=\boxed{\frac{5}{8}}$$

<point>

① 双曲線の媒介変数表示

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点は

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases} \quad (0\leqq\theta<2\pi)$$

とおける

注.

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 上の点は

$$\begin{cases} x=a\tan\theta \\ y=\dfrac{b}{\cos\theta} \end{cases} \quad (0\leqq\theta<2\pi)$$

とおけばよい

注

$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$ （公式）

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$ を覚えておくと導きやすい。

12

(1) $x=3\left(t+\dfrac{1}{t}\right)+1$

$$3\left(t+\frac{1}{t}\right)=x-1$$

$$\therefore t+\frac{1}{t}=\frac{x-1}{3}$$

$\left(t-\dfrac{1}{t}\right)^2=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2-4$ より

$$y^2=\frac{(x-1)^2}{9}-4$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$$

双曲線の中心は $(1,0)$

$\dfrac{(x-1)^2}{36}-\dfrac{y^2}{4}=1$ は $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{4}=1$ を

x軸方向に1平行移動したもの

$\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{4}=1$ の頂点は $(\pm6,0)$

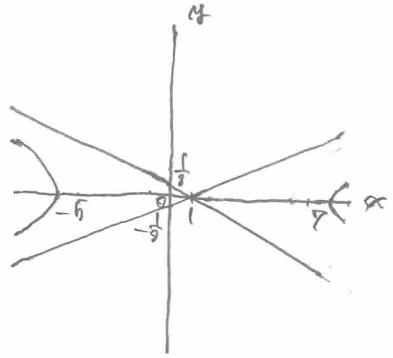
漸近線は $y=\pm\dfrac{1}{3}x$ より

$\dfrac{(x-1)^2}{36}-\dfrac{y^2}{4}=1$ の

頂点は $(-5,0)$, $(7,0)$

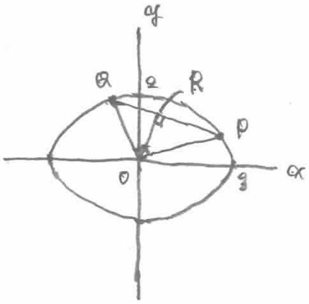
漸近線は $y=\pm\dfrac{1}{3}(x-1)$

(2)



13

(1)



OPがx軸.y軸上にあるとき

$$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=\frac{1}{9}+\frac{1}{4}=\frac{13}{36}$$

OPがx軸.y軸上にないとき

OPを$y=mx$とおくと

OQは$y=-\frac{1}{m}x$とおける

OP^2は

$$4x^2+9m^2x^2=36$$

$$(9m^2+4)x^2=36 \quad \therefore x^2=\frac{36}{9m^2+4}$$

$$y^2=m^2x^2=\frac{36m^2}{9m^2+4}$$

$$OP^2=x^2+y^2=\frac{36m^2+36}{9m^2+4}$$

OQ^2は

$$4x^2+\frac{9}{m^2}x^2=36$$

$$(4m^2+9)x^2=36m^2 \quad \therefore x^2=\frac{36m^2}{4m^2+9}$$

$$y^2=\frac{1}{m^2}x^2=\frac{36}{4m^2+9}$$

$$OQ^2=x^2+y^2=\frac{36m^2+36}{4m^2+9}$$

よって

$$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=\frac{13m^2+13}{36m^2+36}=\frac{13}{36} \quad \square$$

(2) △ORQ∽△POQより

$$OR:OP=OQ:PQ$$

$$OR=\frac{OP\cdot OQ}{PQ}$$

$$OR^2=\frac{OP^2\cdot OQ^2}{PQ^2}$$

$$=\frac{OP^2\cdot OQ^2}{OP^2+OQ^2} \quad \text{(三平方の定理)}$$

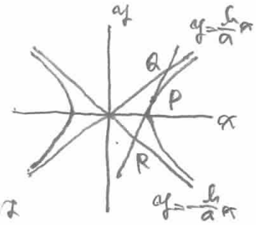
$$=\frac{1}{\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}}=\frac{36}{13}$$

$$\therefore OR=\frac{6\sqrt{13}}{13} \quad \text{(一定)} \ \square$$

14

(1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ のPにおける接線は

$$\frac{px}{a^2}-\frac{qy}{b^2}=1 \cdots ①$$



漸近線は $y=\pm\frac{b}{a}x$

①と $y=\frac{b}{a}x$ の交点Qは

$$\left(\frac{p}{a^2}-\frac{q}{ab}\right)x=1$$

$$\frac{pb-qa}{a^2b}x=1 \quad \therefore x=\frac{a^2b}{pb-qa}$$

$$\therefore \left(\frac{a^2b}{pb-qa}, \frac{ab^2}{pb-qa}\right)$$

①と $y=\frac{b}{a}x$ の交点Rは

$$\left(\frac{a^2b}{pb+qa}, -\frac{ab^2}{pb+qa}\right)$$

これらの中点のx座標は

$$\frac{a^2b}{2}\left(\frac{1}{pb-qa}+\frac{1}{pb+qa}\right)$$

$$=\frac{a^2b}{2}\cdot\frac{2pb}{p^2b^2-q^2a^2}$$

$$=\frac{a^2b^2p}{p^2b^2-q^2a^2}$$

ここで (p, q) は $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点

であるから $p^2b^2 - q^2a^2 = a^2b^2$ より

$$= p$$

中点の y 座標は

$$\frac{ab^2}{2}\left(\frac{1}{pb - qa} - \frac{1}{pb + qa}\right)$$

$$= \frac{ab^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}qa}{p^2b^2 - q^2a^2}$$

$$= \frac{a^2b^2q}{p^2b^2 - q^2a^2}$$

$$= q$$

よって示された

(2) $\triangle OQR$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\left|-\frac{a^2b^2}{p^2b^2 - q^2a^2} - \frac{a^3b^2}{p^2b^2 - q^2a^2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}|2ab| = ab \text{ (一定)}$$

p, q に関係ない