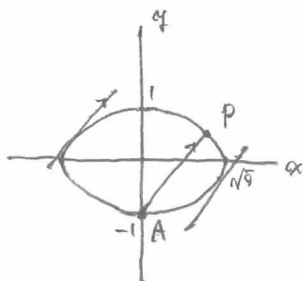


高3数学Ⅱ 4. 2次曲線④

□

①



PはC上の点より

$$P(\sqrt{3}\cos\theta, \sin\theta)$$

$$(0 \leq \theta \leq 90^\circ, 270^\circ \leq \theta < 360^\circ)$$

と表わす

$$\begin{aligned} AP^2 &= 3\cos^2\theta + (\sin\theta + 1)^2 \\ &= 3\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta + 1 \\ &= -2\sin^2\theta + 2\sin\theta + 4 \\ &= -2\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ すなわち $\theta = 30^\circ$ のとき最大

このとき

$$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ 最大値 } \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

② Cの (x_1, y_1) における接線

$$\frac{x_1 x}{2} + y_1 y = 1$$

$$y = -\frac{x_1}{2y_1}x + \frac{1}{y_1} \quad (y_1 \neq 0)$$

の中で AP に平行なものは

$$-\frac{x_1}{2y_1} = 1 \quad \therefore x_1 = -2y_1$$

(x_1, y_1) は C 上の点より

$$x_1^2 + 4y_1^2 = 4$$

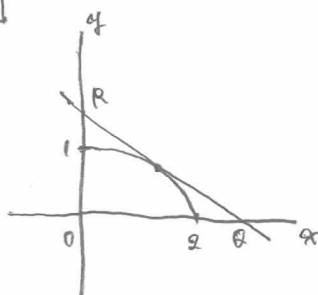
$$(2y_1^2 = 4 \quad \therefore y_1 = \pm \frac{1}{2})$$

$$\therefore Q \text{ は } Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

このとき $\triangle APQ$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

□



$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の $P(x_1, y_1)$ ($x_1, y_1 > 0$) における

接線

$$\frac{x_1 x}{4} + y_1 y = 1$$

$$Q \text{ は } \left(\frac{4}{x_1}, 0\right) \quad R \text{ は } \left(0, \frac{1}{y_1}\right)$$

$$QR^2 = \frac{16}{x_1^2} + \frac{1}{y_1^2}$$

$x_1 = 2\cos\theta, y_1 = \sin\theta$ ($0 < \theta < 90^\circ$) とおくと

$$= \frac{4}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$= 4(1 + \tan^2\theta) + 1 + \frac{1}{\tan^2\theta}$$

$$= 4\tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} + 5$$

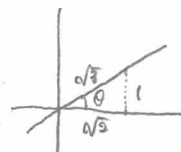
$$\geq 2\sqrt{4\tan^2\theta \cdot \frac{1}{\tan^2\theta}} + 5 = 9$$

等号は $\tan\theta = 1$ のとき

$$4\tan^2\theta = \frac{1}{\tan^2\theta}$$

$$\tan^4\theta = \frac{1}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$\therefore Q$ の最小値は 9 で

このとき P は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

3

$$d) \frac{x^2}{19^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1 \dots ①$$

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{9^2} = 1 \dots ② \text{ の交点 } P \text{ は}$$

$$\frac{x^2}{19^2} + \frac{x^2}{16^2} = 1 + \frac{1}{4^2}$$

$$(16^2 + 19^2)x^2 = 4^2 \cdot 19^2 \cdot 17$$

$$425x^2 = 4^2 \cdot 19^2 \cdot 17$$

$$x^2 = \frac{4^2 \cdot 19^2}{5^2} \quad \therefore x = \pm \frac{52}{5}$$

$$\therefore P\left(\frac{52}{5}, \frac{96}{5}\right)$$

① の P における接線は

$$\frac{4x}{19 \cdot 5} + \frac{8y}{12 \cdot 5} = 1$$

$$\therefore 16x + 19y = 260 \dots ③$$

④ ② の P における接線は

$$\frac{19x}{4 \cdot 5} - \frac{12y}{9 \cdot 5} = 1$$

$$\therefore 19x - 16y = 20 \dots ④$$

③ と ④ の法線ベクトルをそれぞれ

$\vec{n}_1, \vec{n}_2$ とすると

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 19 \end{pmatrix}, \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 16 \cdot 19 + 19 \cdot (-16) = 0 \text{ より}$$

$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ でありから ③ と ④ は直交する

4

$$d) x^2 + 4y^2 = 5$$

両辺 x で微分して

$$2x + 8y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$8y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$y \neq 0 \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$$

$(\pm\sqrt{5}, 0)$ における C の接線は $x = \pm\sqrt{5}$

これは $ax + 4by = 5$ を満たす

$(a, b) = (\pm\sqrt{5}, 0)$ における C の接線は

$$y - b = -\frac{a}{4b}(x - a)$$

$$4by - 4b^2 = -ax + a^2$$

$$ax + 4by = a^2 + 4b^2$$

(a, b) は $x^2 + 4y^2 = 5$ 上の点でありから

$$a^2 + 4b^2 = 5 \text{ より}$$

$$ax + 4by = 5$$

よって示された口

② $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2)$ とすると

T_1, T_2 における接線はそれぞれ

$$x_1x + 4y_1y = 5$$

$$x_2x + 4y_2y = 5$$

これらから $A(1, \frac{9}{2})$ を通るとき

$$x_1 + 6y_1 = 5$$

$$x_2 + 6y_2 = 5$$

これらの式は直線 $x + 6y = 5$ から

T_1, T_2 を通ることを表し、

T_1, T_2 は異なる2点で異なる2点を

通す直線は1つしかないから

T_1, T_2 を通す直線は

$$x + 6y = 5$$

<point>

① 傾と接線

5

d) $y = ax + b$ かつ C と接するとき

$$4x^2 + 9(ax + b)^2 = 9b$$

$$4x^2 + 9(a^2x^2 + 2abx + b^2) - 9b = 0$$

$$(9a^2 + 4)x^2 + 18abx + 9b^2 - 9b = 0$$

加重解をもてはよいから

判別式を D として

$$\frac{D}{4} = (9ab)^2 - (9a^2 + 4)(9b^2 - 9b) = 0$$

$$9 \cdot 9b^2a^2 - 9b^2(9a^2 + 4) + 4 \cdot 9b = 0$$

$$\therefore 9a^2b^2 - 4b = 0 //$$

e) $P(x, y)$ とする

i) $X = \pm 3a$ とし

$$(X, Y) = (3, \pm 2), (-3, \pm 2)$$

ii) $X \neq \pm 3a$ とし

P を通る直線は傾きを m として

$$y - Y = m(x - X)$$

$$\therefore y = mx - mX + Y$$

これを C に接するとき d より

$$9m^2 - 6(-mX + Y)^2 + 4 = 0$$

$$(9 - X^2)m^2 + 2XYm + 4 - Y^2 = 0$$

2本の接線が直交するためには

① 異なる2実解をもた

これらの2解の積が -1 となれい

よから

①の判別式を D として

$$\frac{D}{4} = X^2Y^2 - (9 - X^2)(4 - Y^2) > 0$$

$$= -8 + 9X^2 + 9Y^2 > 0$$

$$\therefore X^2 + Y^2 > 9 //$$

①の2解を m_1, m_2 とすると

$$m_1 m_2 = \frac{4 - Y^2}{9 - X^2} = -1$$

$$4 - Y^2 = X^2 - 9$$

$$\therefore X^2 + Y^2 = 18. (X \neq \pm 3)$$

d), e) より P の軌跡は

$$(4) X^2 + Y^2 = 18 //$$

<point>

① 導出

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ に直交する2接線を}$$

引けるような点の軌跡は

$$(4) X^2 + Y^2 = a^2 + b^2$$

であり、これを導出という

6

d) $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ の (x_1, y_1) における接線は

$$x_1 x + \frac{y_1 y}{9} = 1$$

$m \neq 0$ であるから $y_1 \neq 0$ より

$$y = -\frac{9x_1}{y_1}x + \frac{1}{\frac{y_1}{9}}$$

この傾き $m = -\frac{9x_1}{y_1}$ より

$$m = -\frac{9x_1}{y_1} \quad \therefore y_1 = \frac{9x_1}{m}$$

(x_1, y_1) は $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ 上の点より

$$9x_1^2 + y_1^2 = 9$$

$$9x_1^2 + \frac{9^2 x_1^2}{m^2} = 9$$

$$(m^2 + 9)x_1^2 = m^2$$

$$x_1^2 = \frac{m^2}{m^2 + 9}$$

$$x_1 > 0 \text{ } (-m < 0 \text{ より}) \text{ より } x_1 = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 9}} //$$

$$y_1 = \frac{9}{\sqrt{m^2 + 9}} //$$

② O と AB との距離は

$$\frac{|-1|}{\sqrt{x_1^2 + \frac{y_1^2}{9}}}$$

ここで

$$x_1^2 + \frac{y_1^2}{9} = \frac{m^2+1}{m^2+9}$$

より

$$= \sqrt{\frac{m^2+9}{m^2+1}}$$

③ 同様に (1) と AD の接点を (x_2, y_2) とおくと

$$-\frac{9x_2}{y_2} = \frac{1}{m} \quad \therefore y_2 = -9mx_2$$

$$9x_2^2 + y_2^2 = 9 \quad \text{より}$$

$$9x_2^2 + 81m^2x_2^2 = 9$$

$$(9m^2+1)x_2^2 = 1 \quad \therefore x_2 = \frac{1}{\sqrt{9m^2+1}}$$

$$y_2 = \frac{-9m}{\sqrt{9m^2+1}}$$

O と AD との距離は

$$\frac{|-1|}{\sqrt{x_2^2 + \frac{y_2^2}{9}}}$$

ここで

$$x_2^2 + \frac{y_2^2}{9} = \frac{m^2+1}{9m^2+1}$$

より

$$= \sqrt{\frac{9m^2+1}{m^2+1}}$$

長方形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 2\sqrt{\frac{m^2+9}{m^2+1}} \cdot 2\sqrt{\frac{9m^2+1}{m^2+1}} \\ &= 4\sqrt{\frac{(m^2+9)(9m^2+1)}{(m^2+1)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |1-t| &= \frac{9m^2+10m^2+9}{m^2+9m^2+1} \\ &= 9 + \frac{4m^2}{m^2+9m^2+1} \\ &= 9 + \frac{4}{m^2+\frac{1}{m^2}+9} \end{aligned}$$

$$m^2 + \frac{1}{m^2} \geq 2\sqrt{m^2 \cdot \frac{1}{m^2}} = 2$$

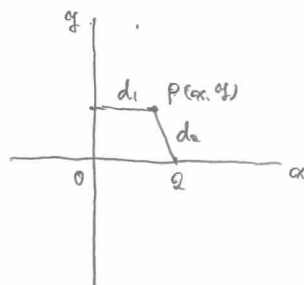
$$\text{等号成立は } m^2 = \frac{1}{m^2} \quad \therefore m=1 \text{ のとき}$$

$m=1$ のとき面積が最大で

$$\text{最大値 } S = 8$$

⑦

d)



$$ad_1 = d_2 \quad \text{より}$$

$$a \cdot d_1 = d_2$$

$$a \cdot x = (x-2)^2 + y^2$$

$$(1-a)x^2 - 4x + y^2 + 4 = 0$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$\frac{3}{4}x^2 - 4x + y^2 + 4 = 0$$

$$\frac{3}{4}\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$$

$$\frac{9}{16}\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1 \quad (\text{7} \cdot (7))$$

$$\text{⑧ } a=1 \text{ のとき}$$

$$-4x + y^2 + 4 = 0$$

$$y^2 = 4(x-1) \quad (\text{右支分の軌跡})$$

3) $a=2$ のとき

$$-9x^2 + 4x + y^2 + 4 = 0$$

$$9x^2 + 4x - y^2 - 4 = 0$$

$$9\left(x + \frac{2}{9}\right)^2 - y^2 - \frac{16}{9} = 0$$

$$\frac{9}{16}\left(x + \frac{2}{9}\right)^2 - \frac{9}{16}y^2 = 1 \quad (\text{双曲線})$$

<point>

① 离心率

8

Sは

$$(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

xy 平面上の点を $P(x, y, 0)$ とする

直線 BP は $P(x, y, z)$ とすると

$$\vec{OP} = \vec{OB} + t\vec{BP} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x \\ y \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = xt \\ y = yt \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

Sと直線 BP が交点をもつときの P の動く範囲が球 S の影の部分であるから

$$(xt-1)^2 + yt^2 + (2-3t)^2 = 1$$

$$x^2t = 2xt + 1 + y^2t + 9t^2 - 12t + 4 = 1$$

$$(x^2 + y^2 - 9)t^2 - 2(x+6)t + 4 = 0$$

の判別式を D として

$$D/4 = (x+6)^2 - 4(x^2 + y^2 - 9) \geq 0$$

$$-9x^2 + 12x - 4y^2 \geq 0$$

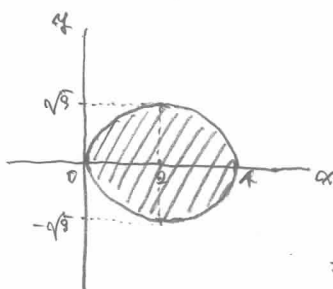
$$9x^2 - 12x + 4y^2 \leq 0$$

$$9(x-2)^2 + 4y^2 \leq 12$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{3} \leq 1$$

よって

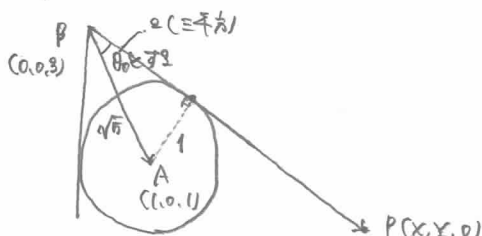
$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{3} \leq 1$$



境界含む

[別解]

実数解をもつ条件から X と Y の関係式を求めた。



球 S と直線 BP が接するとき

$$\cos \theta_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\theta \leq \theta_0$ であるのは、球と直線が交わるから

$$\cos \theta \geq \cos \theta_0$$

$$\frac{\vec{BA} \cdot \vec{BP}}{|\vec{BA}| |\vec{BP}|} \geq \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \leftarrow \text{内積より}$$

と判別式の性質を利用して求めてもよい。

<point>

① 判別式の性質としての二次曲線。

②

$$\Phi) \quad r = \frac{1}{1+a\cos\theta} \quad |a| \leq 1 \text{ のとき } r > 0$$

$$r(1+a\cos\theta) = 1$$

$$r + a r \cos\theta = 1$$

$$r = 1 - a r \cos\theta$$

$$r^2 = (1 - a r \cos\theta)^2 \quad (\text{両辺とも正より})$$

$$r^2 + a^2 r^2 \cos^2\theta = 1 - 2a r \cos\theta + a^2 r^2 \cos^2\theta$$

$$(1 - a^2) r^2 + 2a r \cos\theta + a^2 r^2 \cos^2\theta = 1$$

$$a = \pm 1 \text{ のとき}$$

$$2a r \cos\theta = 1$$

$$\therefore r^2 = -2a \left(r \cos\theta - \frac{1}{2a} \right) \quad (\text{両辺乗ず})$$

$$|a| < 1 \text{ のとき}$$

$$(1 - a^2) \left(r \cos\theta + \frac{a}{1 - a^2} \right)^2 + r^2 = \frac{1}{1 - a^2}$$

$$(1 - a^2) \left(r \cos\theta + \frac{a}{1 - a^2} \right)^2 + (1 - a^2) r^2 = 1 \quad (\text{両辺乗ず})$$

③) 双曲線は $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ と表せる

$$\text{このとき } r = 1$$

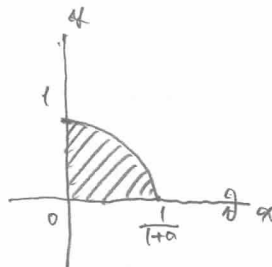
$$\text{すなわち } r = \pm 1 \text{ で交わる}$$

④) 円と双曲線正の部分との交点は

$$r = 1 \text{ のとき } \theta = 0 \text{ より}$$

$$r = \frac{1}{1+a}$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{1+a}$$



$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{1+a}} r^2 d\alpha$$

$$= \pi \int_0^{\frac{1}{1+a}} \left\{ (1 - a^2) \left(\alpha + \frac{a}{1 - a^2} \right)^2 + \frac{1}{1 - a^2} \right\} d\alpha$$

$$= \pi \left\{ -\frac{1 - a^2}{3} \left[\left(\alpha + \frac{a}{1 - a^2} \right)^3 \right]_0^{\frac{1}{1+a}} + \frac{1}{1 - a^2} \left[\alpha \right]_0^{\frac{1}{1+a}} \right\}$$

$$= \pi \left\{ -\frac{1 - a^2}{3} \left\{ \left(\frac{1}{1 - a^2} \right)^3 - \left(\frac{a^3}{1 - a^2} \right) \right\} + \frac{1 - a}{(1 - a^2)^2} \right\}$$

$$= \pi \left\{ \frac{a^3 - 1}{3(1 - a^2)^2} + \frac{1 - a}{(1 - a^2)^2} \right\}$$

$$= \pi \cdot \frac{a^3 - 3a + 2}{3(1 - a^2)^2} \quad \begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$= \pi \cdot \frac{(a+2)(a-1)^2}{3(a-1)^2(a+1)^2}$$

$$= \frac{a+2}{3(a+1)^2} \pi$$

<point>

① 極座標、極方程式

注

本問では双曲線について記述されていないが

$|a| > 1$ のときは双曲線を表す

そのとき a は

$$r = \frac{1}{1+a\cos\theta} \text{ と } r = \frac{-1}{1-a\cos\theta} \text{ は } (1) \text{ の両方} \\ \text{を表すから}$$

$$r = 1 - a r \cos\theta \quad r = -1 + a r \cos\theta$$

$$\therefore r = \pm(1 - a r \cos\theta)$$

$$\Leftrightarrow r^2 = (1 - a r \cos\theta)^2 \text{ とすればよい}$$