

高3数学Ⅱ 9. 数列の極限

[1]

d) $a_1 = S_1 = 9$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \\ &= 4(9n^2 - 3n + 1) + 6(2n - 1) - 1 \\ &= 12n^2 - 9 \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つから

$$a_n = 12n^2 - 9 \quad (n \geq 1) //$$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{12n^2 + 24n + 9} - \sqrt{12n^2 - 9})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(12n^2 + 24n + 9) - (12n^2 - 9)}{\sqrt{12n^2 + 24n + 9} + \sqrt{12n^2 - 9}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24n + 12}{\sqrt{12n^2 + 24n + 9} + \sqrt{12n^2 - 9}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24 + \frac{12}{n}}{\sqrt{12 + \frac{24}{n} + \frac{9}{n^2}} + \sqrt{12 - \frac{9}{n^2}}}$$

$$= \frac{24}{4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} //$$

e)

$$T_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$= \sum_{k=1}^n (48k^2 - 9)$$

$$= 8n(n+1)(2n+1) - 9n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n(n+1)(2n+1) - 9n}{4n^3 + 6n^2 - n}$$

$$= 4 //$$

e)

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{12k^2 - 9}$$

$$= \frac{1}{9} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{3(2n+1)} //$$

[2] <point> ① 不定形の極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2} \{(n+1) - n\}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{1} \right)$$

$$= 3 //$$

[3]

d) $0 < a \leq 1$ とする

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a)^{\frac{1}{n}} = 1$$

e) $a > 1$ とする

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ a^n \left(1 + \left(\frac{1}{a} \right)^n \right)^{\frac{1}{n}} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a \left(1 + \left(\frac{1}{a} \right)^n \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= a //$$

<point>

① $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$

4

$$d) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - 2x + 2}{x^n + 1}$$

$$i) 0 \leq x < 1 \text{ とき}$$

$$f(x) = -2x + 2$$

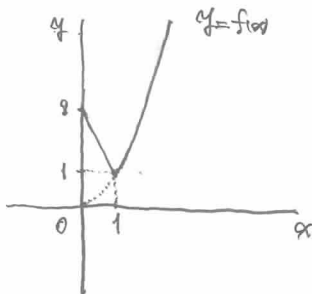
$$ii) x = 1 \text{ とき}$$

$$f(x) = 1$$

$$iii) x > 1 \text{ とき}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1} + 2\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^n} = x^2$$

e) d) より



5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\log \frac{2}{1} + \log \frac{2}{2} + \dots + \log \frac{n+1}{n} - \log n \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \log \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \frac{n+1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$\Rightarrow \log e = 1$$

<point>

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

6

$$d) (1+a)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 a + {}_nC_2 a^2 + {}_nC_3 a^3 + \dots + {}_nC_n a^n \\ = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2} a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^3 + \dots + a^n \left(\frac{n!}{n!} \right) \\ > \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) a^3 \quad (a > 0, n \geq 3 \text{ より}) \quad \square$$

$$e) r > 1 \text{ より } r = 1+a \quad (a > 0) \text{ とき}$$

$$0 < \frac{n^2}{r^n} = \frac{n^2}{(1+a)^n} < \frac{n^2}{\frac{1}{6} n(n-1)(n-2) a^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\frac{1}{6} n(n-1)(n-2) a^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) a^3} = 0$$

であるから はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{r^n} = 0$$

<point>

① はさみうちの原理

7

d) 自然数 2^n の桁数を k のとき ($k \in \mathbb{N}$)

$$10^{k-1} \leq 2^n < 10^k$$

$$k-1 \leq \log_{10} 2^n < k$$

$$k \leq \log_{10} 2^n + 1 < k+1$$

$$\therefore \lfloor \log_{10} 2^n + 1 \rfloor = k$$

e) d) より

$$k_n = \lfloor \log_{10} 2^n + 1 \rfloor$$

$$k_n \leq \log_{10} 2^n + 1 < k_n + 1 \text{ より}$$

$$\log_{10} 2^n < k_n < \log_{10} 2^n + 1$$

$$n \log_{10} 2 < k_n < n \log_{10} 2 + 1$$

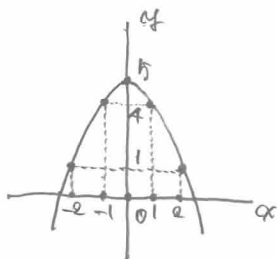
$$\log_{10} 2 < \frac{k_n}{n} < \log_{10} 2 + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log_{10} 2 + \frac{1}{n} \right) = \log_{10} 2 \text{ であるから はさみうちの原理より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = \log_{10} 2$$

8

d)



$$a(5) = 6 + 2 \times (5 + 2) = 20 //$$

$$e) a(n) = n + 1 + 2 \sum_{k=1}^n (n - k^2 + 1)$$

$$= n + 1 + 2(n+1)k - 2 \cdot \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) //$$

$$= (n+1)(2k+1) - \frac{1}{3} k(k+1)(2k+1)$$

$$= \frac{1}{3} (2k+1) \{ 3(n+1) - k(k+1) \} //$$

$$g) k \leq \sqrt{n} < k+1 \text{ より}$$

$$\sqrt{n} - 1 < k \leq \sqrt{n}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{k}{\sqrt{n}} \leq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1 \text{ であるから}$$

$$\text{はさみうちの原理より } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{n}} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(2 \cdot \frac{k}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &\quad \left\{ 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{k}{\sqrt{n}} \cdot \frac{k+1}{\sqrt{n}} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (3 - 1) = \frac{4}{3} // \end{aligned}$$

9

$$d) a_n = k \text{ となる最後の項は}$$

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{1}{2} k(k+1)$$

$$\text{第 } \frac{1}{2} k(k+1) \text{ 項}$$

よって

$$\frac{1}{2} (k-1)k < n \leq \frac{1}{2} k(k+1) //$$

$$e) (k-1)k < 200 \leq k(k+1)$$

$$(k-1)k < 200 \leq k(k+1) \quad (n=100 \text{ のとき})$$

$$19 \cdot 14 = 182, 14 \cdot 15 = 210 \text{ より}$$

$$a_{100} = 14$$

$$\sum_{k=1}^{100} a_k = 1 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 19 \cdot 19 + 14 \cdot 9$$

$$= \sum_{k=1}^{19} k^2 + 126$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 19 \cdot 20 \cdot 39 + 126 = 945 //$$

$$g) 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 9 = 51 \text{ 個} //$$

$$\frac{k}{\sqrt{\frac{1}{2} k(k+1)}} \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{2} (k-1)k}} \quad (a_n = k \text{ のとき})$$

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } k \rightarrow \infty \text{ より}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{2} k(k+1)}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{2} (k-1)k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{k}}} = \sqrt{2}$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2} //$$

10

$$d) a_1 = [\sqrt{0}] = 0$$

$$a_2 = [\sqrt{1}] = 1$$

$$a_3 = [\sqrt{2}] = 1$$

$$a_4 = [\sqrt{3}] = 1$$

$$a_5 = [\sqrt{4}] = 2 //$$

$$e) a_n = 5 \text{ となるとき}$$

$$5^2 \leq n-1 \leq 6^2 - 1$$

$$\therefore 26 \leq n \leq 36$$

これを満たす $n \in \mathbb{N}$ は 11 個 //

3) $a_n = k$ とする n は $(k \in \mathbb{Z}, k \geq 0)$

$$k^2 \leq a_{n-1} \leq (k+1)^2 - 1$$

$$\therefore k^2 + 1 \leq a_n \leq (k+1)^2$$

これを満たす $n \in \mathbb{N}$ は

$$(k+1)^2 - (k^2 + 1) + 1 = 2k + 1 \text{ 個}$$

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (2k^2 + k)$$

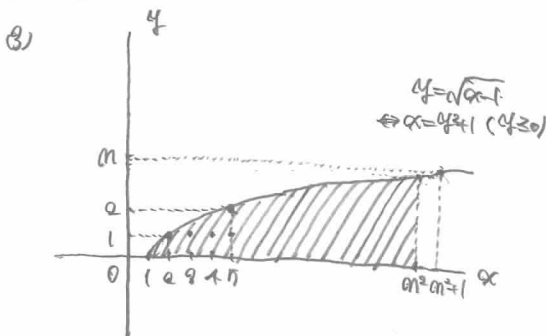
$$= 2 \cdot \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2} (n-1)n$$

$$= \frac{1}{6} (n-1)n \{ 2(2n-1) + 3 \}$$

$$= \frac{1}{6} (n-1)n(4n+1) //$$

$$\begin{aligned} \text{4) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(4 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{2}{3} // \end{aligned}$$

[8/17]



$S(n)$ は [2] の前半部分 (ただし、左端

は $y = \sqrt{x-1}$ とは含み、 x 軸、 $(1,0)$ は

除く) 内の格子点の個数に等しい

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \{n^2 - (k^2 + 1)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - k^2)$$

$$= n^2(n-1) - \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1)$$

$$= \frac{1}{6} n(n-1) \{ 6n - (2n-1) \}$$

$$= \frac{1}{6} (n-1)n(4n+1) //$$