

1.

次の関数のグラフの漸近線を求め、そのグラフをかけ。

(1) $y = \frac{2x-3}{x-2}$

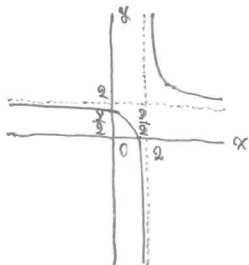
(2) $y = \frac{1-2x}{x-1}$

(3) $y = \frac{x-2}{2x+1}$

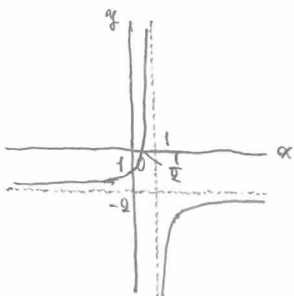
(4) $xy = 3x + 2y - 5$

[解]

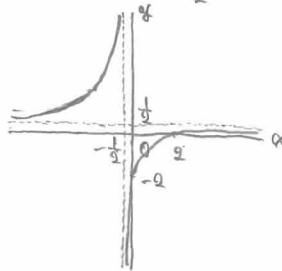
$$\begin{aligned} \text{① } y &= \frac{2x-3}{x-2} \\ &= \frac{2(x-2)+1}{x-2} \\ &= \frac{1}{x-2} + 2 \end{aligned}$$

漸近線は $x=2$, $y=2$ 

$$\begin{aligned} \text{② } y &= \frac{1-2x}{x-1} \\ &= \frac{-2(x-1)-1}{x-1} \\ &= -\frac{1}{x-1} - 2 \end{aligned}$$

漸近線は $x=1$, $y=-2$ 

$$\begin{aligned} \text{③ } y &= \frac{x-2}{2x+1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{5}{2}}{2x+1} = \frac{\frac{1}{2}}{2x+1} - \frac{\frac{5}{2}}{2x+1} \\ &= -\frac{5}{4(x+\frac{1}{2})} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

漸近線は $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ 

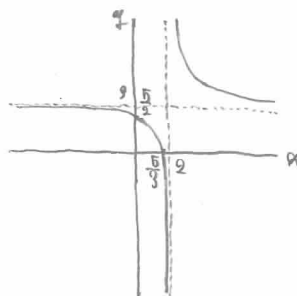
④ $xy = 3x + 2y - 5$

$(x-2)y = 3x-5$

 $x=2$ のとき左辺=0, 右辺=1となり不合理.よって $x \neq 2$.

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x-5}{x-2} \\ &= \frac{3(x-2)+1}{x-2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x-2} + 3$$

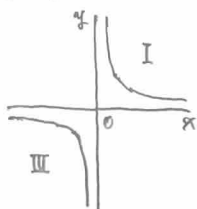
漸近線は $x=2$, $y=3$ 

<point>

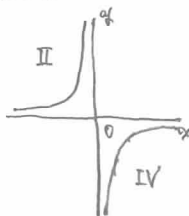
① 分数関数

i) $y = \frac{a}{x} \ (a \neq 0) \leftarrow$ 反比例

ii) $a > 0$



iii) $a < 0$



- ・定義域は $x=0$ を除く実数全体
- ・値域は $y=0$ を除く実数全体
漸近線が直交する
- ・グラフは (直交) 双曲線系
- ・漸近線は $x=0$ (y 軸), $y=0$ (x 軸)
- ・中心は $(0, 0)$
漸近線の交点

ii) $y = \frac{a}{x-p} + q \ (a \neq 0)$ (標準形)

は $y = \frac{a}{x}$ を x 軸方向に p
 y 軸方向に q

だけ平行移動したもの.

- ・定義域は $x=p$ を除く実数全体
- ・値域は $y=q$ を除く実数全体
- ・漸近線は $x=p, y=q$
- ・中心は (p, q)

② グラフをかくときは

$y = \frac{ax+b}{cx+d} \ (ad-bc \neq 0, c \neq 0)$ (一般形)

は標準形に化けて、漸近線、中心
を調べたからかく.

(イメージとしては2次関数を平方完
成するようなもの)

1.

(1) 関数 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ のグラフが $x=3$ と $y=1$ を漸近線とし、さらに点 $(2,2)$ を通るとき、 b の値を求めよ。

(2) 関数 $y = \frac{bx+c}{ax+1}$ のグラフが点 $(0,2)$ を通り、かつ直線 $x = -\frac{1}{5}$, $y = \frac{3}{5}$ を漸近線にもつとき、 a, b, c の値を求めよ。

【解】

(1) 漸近線が $x=3$, $y=1$ より

$$y-1 = \frac{p}{x-3}$$

とおける。

$(2,2)$ を通るから

$$1 = -p \quad \therefore p = -1$$

よって

$$\begin{aligned} y &= \frac{-1}{x-3} + 1 \\ &= \frac{-1 + (x-3)}{x-3} \\ &= \frac{x-4}{x-3} \quad \therefore b = -4. \end{aligned}$$

【別解】

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax+b}{x+c} \\ &= \frac{a(x+c) - ac + b}{x+c} \\ &= \frac{-ac+b}{x+c} + a \end{aligned}$$

漸近線が $x=3$, $y=1$ より

$$a = 1, c = -3$$

このとき

$$y = \frac{b+1}{x-3} + 1$$

$(2,2)$ を通るから

$$2 = -(b+1) + 1 \quad \therefore b = -4.$$

(2) 漸近線が $x = -\frac{1}{5}$, $y = \frac{3}{5}$ より

$$y - \frac{3}{5} = \frac{p}{x + \frac{1}{5}}$$

とおける。

$(0,2)$ を通るから

$$\frac{7}{5} = 5p \quad \therefore p = \frac{7}{25}$$

よって

$$\begin{aligned} y &= \frac{\frac{7}{25}}{x + \frac{1}{5}} + \frac{3}{5} \\ &= \frac{\frac{7}{25} + \frac{3}{5}(x + \frac{1}{5})}{x + \frac{1}{5}} \\ &= \frac{\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}}{x + \frac{1}{5}} \\ &= \frac{3x+2}{5x+1} \quad \therefore a = 5, b = 3, c = 2. \end{aligned}$$

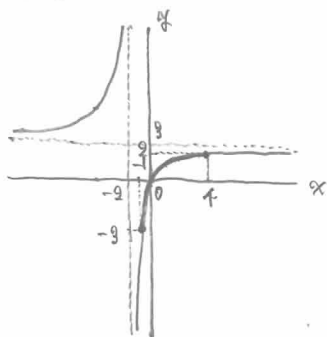
1.

次の関数のグラフをかけ。また、その値域を求めよ。

$$y = \frac{3x}{x+2} \quad (-1 \leq x \leq 4)$$

[解]

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x}{x+2} \\ &= \frac{3(x+2)-6}{x+2} \\ &= -\frac{6}{x+2} + 3 \end{aligned}$$

漸近線は $x = -2$, $y = 3$ 

グラフより

$$-9 \leq y \leq 2$$

2.

a を正の定数とする. $x \geq 0$ のとき, $y = \frac{ax-1}{a-x}$ がとりうる値の範囲を求めよ. (岡山大)

[解]

$$y = \frac{ax-1}{a-x} \quad (x \geq 0)$$

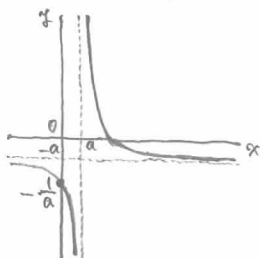
$$= \frac{-ax+1}{x-a}$$

$$= \frac{-a(x-a)-a^2+1}{x-a}$$

$$= \frac{1-a^2}{x-a} - a$$

漸近線は $x=a$, $y=-a$

i) $0 < a < 1$ のとき

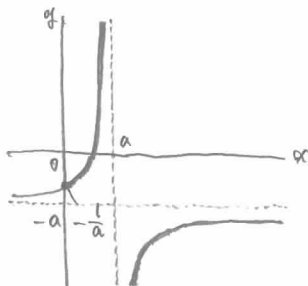


$$y \leq -\frac{1}{a}, \quad y > -a$$

ii) $a=1$ のとき

$$y = -1$$

iii) $a > 1$ のとき



$$y \geq -\frac{1}{a}, \quad y < -a$$