

1.

次の方程式を解け.

(1) $\frac{2x-4}{x-1} = 3$

(2) $\frac{5}{x+3} = 2x-3$

[解]

$$(1) \frac{2x-4}{x-1} = 3 \quad (\text{注 } x \neq 1) \quad \begin{array}{l} \text{これから } x \text{ について} \\ \text{可値.} \end{array}$$

$$2x-4 = 3(x-1), \quad x \neq 1$$

$$\therefore x = -1$$

$$(2) \frac{5}{x+3} = 2x-3 \quad (x \neq -3)$$

$$5 = (2x-3)(x+3), \quad x \neq -3$$

$$2x^2 + 3x - 14 = 0 \quad \frac{1}{2} \times \frac{-3}{7}$$

$$(x-2)(2x+7) = 0$$

$$\therefore x = 2, -\frac{7}{2}$$

2.

(1) k は定数とする. 方程式 $\frac{x-1}{x-2} = -x+k$ の実数解の個数を調べよ.

(2) x の関数 $y = \frac{-2x-6}{x-3}$ のグラフが直線 $y = kx$ と交わらないとき, k の範囲を求めよ.

(3) 2つの関数 $y = \frac{1}{x-1}$ と $y = -|x|+k$ のグラフが2個以上の点を共有する k の値の範囲を求めよ. ((3) 法政大)

[解]

$$(1) \frac{x-1}{x-2} = -x+k \quad (x \neq 2) \dots (*)$$

$$x-1 = (-x+k)(x-2) \dots \textcircled{1}$$

$$x^2 - (k+1)x + 2k-1 = 0, \quad x \neq 2$$

$x=2$ のとき 左辺=1, 右辺=0 となるので, 不合理

すなわち $\textcircled{1}$ は任意の k に対して

$x=2$ を解にもつことはない.

$\textcircled{1}$ の判別式を D とすると

$$D = (k+1)^2 - 4(2k-1) \\ = k^2 - 6k + 5 = (k-1)(k-5)$$

(*) の解の個数は

$D > 0$ すなわち $k < 1, k > 5$ のとき 2 個.

$D = 0$ $k = 1, 5$ 1 個

$D < 0$ $1 < k < 5$ 0 個.

$$(2) \frac{-2x-6}{x-3} = kx \text{ が実数解をもたない}$$

れはよい

$$-2x-6 = kx(x-3), \dots \textcircled{1}$$

$$kx^2 - (3k+2)x - 6 = 0, \quad x \neq 3$$

$x=3$ のとき 左辺=12, 右辺=0 より

$\textcircled{1}$ から $x=3$ を解にもつことはない.

$k=0$ のとき $2x+6=0 \quad x=-3$

実数解をもつので不適.

$\textcircled{1}$ の判別式を D とすると

$$D = (3k+2)^2 - 4k(-6)$$

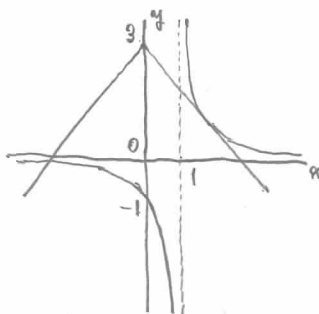
$$= 9k^2 + 36k + 4 < 0$$

$$\therefore \frac{6-4\sqrt{2}}{9} < k < \frac{6+4\sqrt{2}}{9}$$

6

$$(3) y = -|x|+k$$

$$= \begin{cases} -x+k & (x \geq 0) \\ x+k & (x < 0) \end{cases}$$



$y = \frac{1}{x-1}$ と $y = -x+k$ が接するとき

$$\frac{1}{x-1} = -x+k,$$

$$1 = (-x+k)(x-1)$$

$$x^2 - (k+1)x + k+1 = 0$$

この判別式を D として

$$D = (k+1)^2 - 4(k+1)$$

$$= (k+1)(k-3) = 0 \quad \therefore k = -1, 3.$$

よって $y = \frac{1}{x-1}$ と $y = -|x|+k$ が 2 個以上の共有点をもつのは $k \geq 3$.

1.

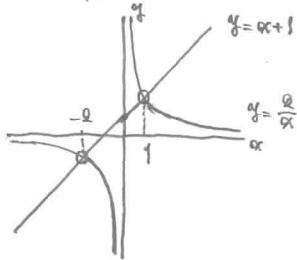
グラフを利用して、次の不等式を解け.

(1) $x+1 > \frac{2}{x}$

(2) $\frac{2x-1}{x-1} > x+1$

[解]

(1) $x+1 > \frac{2}{x}$

 $y = \frac{2}{x}$ と $y = x+1$ の交点.

$$\frac{2}{x} = x+1$$

$$x(x+1) = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -2, 1$$

 $x+1 > \frac{2}{x}$ となるのは、グラフより.

$$-2 < x < 0, x > 1$$

[別解]

$$x+1 > \frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$$

両辺 $x^2 (> 0)$ をかけて

$$x^2(x+1) > 2x, \quad x \neq 0$$

$$x^3 + x^2 - 2x > 0$$

$$x(x+2)(x-1) > 0$$

$$\therefore -2 < x < 0, x > 1$$

注.

両辺に x をかけて分母を払いたい
が x は正にも負にもなるので、方
程式の場合はよいが、不等式の場合
はマズい。(負の数をかけてとき
は不等号の向きが逆になる) x を
正負に場合分けをしてもよいが、
面倒なので x^2 をかけて分母を払う。
22

(2) $\frac{2x-1}{x-1} > x+1 \quad (x \neq 1)$

両辺 $(x-1)^2$ をかけて

$$(2x-1)(x-1) > (x+1)(x-1)^2, \quad x \neq 1$$

$$2x^2 - 3x + 1 > x^3 - x^2 - x + 1$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x < 0$$

$$x(x-1)(x-2) < 0$$

$$\therefore x < 0, 1 < x < 2$$

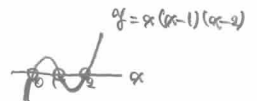
注.

$$\frac{2x-1}{x-1} \geq x+1 \quad \text{では}$$

$$(2x-1)(x-1) \geq (x+1)(x-1)^2 \quad \text{を解くと}$$

 $x=1$ が含まれるので、 $x=1$ を除くこと
を忘れない。

$$\text{答. } x \leq 0, 1 < x \leq 2.$$



2.

不等式 $\frac{1}{x-1} < \frac{2}{x+1}$ を解け.

[解]

$$\frac{1}{x-1} < \frac{2}{x+1} \quad (x \neq -1, 1) \leftarrow \text{グラフでは}\right.$$

両辺 $(x+1)^2(x-1)^2$ をかけると

$$(x+1)^2(x-1) < 2(x+1)(x-1)^2, \quad x \neq \pm 1$$

$$x^3 + x^2 - x - 1 < 2(x^3 - x^2 - x + 1)$$

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 > 0$$

$$x^2(x-3) - (x-3) > 0$$

$$(x+1)(x-1)(x-3) > 0$$

$$\therefore -1 < x < 1, \quad x > 3$$

$$y = (x+1)(x-1)(x-3)$$



3.

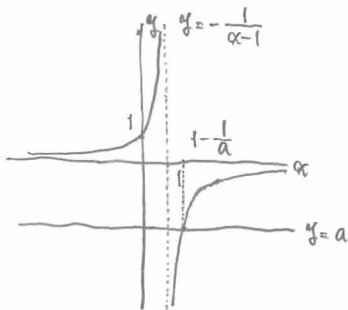
$$(1) \frac{x}{x-1} < 1-a \text{ を解け.}$$

$$(2) ax \geq \frac{1}{x} \text{ を解け.}$$

((1) 大阪大)

[解]

$$\begin{aligned} d) \quad & \frac{x}{x-1} < 1-a \\ & \frac{(x-1)+1}{x-1} < 1-a \\ & \frac{1}{x-1} + x < 1-a \\ & -\frac{1}{x-1} > a \\ & y = -\frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

漸近線は $x=1, y=0$  $y = -\frac{1}{x-1}$ と $y=a$ の交点は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x-1} &= a \\ x-1 &= -\frac{1}{a} \quad \therefore x = 1 - \frac{1}{a} \end{aligned}$$

グラフより

 $a < 0$ のとき $x < 1, x > 1 - \frac{1}{a}$ $a = 0$ のとき $x < 1$ $a > 0$ のとき $1 - \frac{1}{a} < x < 1$

[別解]

$$-\frac{1}{x-1} > a \text{ までは同じ (} x \neq 1 \text{)}$$

両辺 $(x-1)^2$ をかけて

$$-(x-1) > a(x-1)^2, x \neq 1$$

$$ax^2 - (2a-1)x + a-1 < 0 \quad \frac{1}{a}x = 1 - \frac{1}{a}$$

i) $a=0$ のとき

$$x-1 < 0 \quad \therefore x < 1$$

ii) $a \neq 0$ のとき

$$(x-1)(ax - (a-1)) < 0 \quad \left(\begin{array}{l} x=1 \\ x=1-\frac{1}{a} \end{array} \right)$$

i) $a > 0$ のとき

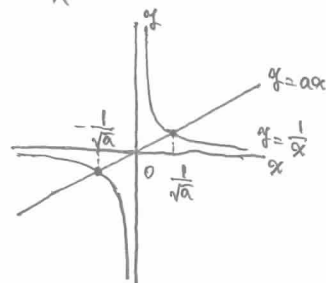
$$1 - \frac{1}{a} < x < 1$$

ii) $a < 0$ のとき

$$x < 1, x > 1 - \frac{1}{a}$$



$$(2) \quad ax \geq \frac{1}{x}$$

 $a \leq 0$ のとき $x < 0$ $a > 0$ のとき $y = \frac{1}{x}$ と $y = ax$ との交点は

$$\frac{1}{x} = ax$$

$$x^2 = \frac{1}{a} \quad \therefore x = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$$

グラフより $-\frac{1}{\sqrt{a}} \leq x < 0, x \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$

4.

(1) a を実数とすると、 x に関する次の不等式を解け。

$$\frac{ax-1}{x-a} < 2a-1$$

(2) x についての不等式 $\frac{a}{x-1} - \frac{1}{x} > 0$ を解け。ただし、 a は与えられた正の実数である。

((1) 法政大 (2) 龍谷大)

[解]

d) $\frac{ax-1}{x-a} < 2a-1 \quad (x \neq a) \leftarrow$ クラフツは辛い

両辺 $(x-a)^2$ をかけて

$$(ax-1)(x-a) < (2a-1)(x-a)^2, \quad x \neq a$$

$$ax^2 - (a^2+1)x + a < (2a-1)x^2 - 2a(2a-1)x + a^2(2a-1)$$

$$(a-1)x^2 - (3a^2-2a-1)x + 2a^2-a^2-a > 0$$

$$(a-1)x^2 - (a-1)(3a+1)x + a(a-1)(2a+1) > 0$$

① $a=1$ のとき $0 > 0$ となり 解なし。② $a > 1$ のとき

$$a-1 > 0 \text{ より}$$

$$x^2 - (3a+1)x + a(2a+1) > 0$$

$$(x-a)(x-(2a+1)) > 0$$

$$\therefore x < a, x > 2a+1$$

③ $a < 1$ のとき

$$a-1 < 0 \text{ より}$$

$$x^2 - (3a+1)x + a(2a+1) < 0$$

$$(x-a)(x-(2a+1)) < 0$$

$$2a+1-a = a+1 \text{ より } \leftarrow \begin{matrix} a \text{ と } 2a+1 \text{ の} \\ \text{大小比較} \end{matrix}$$

$$-1 < a < 1 \text{ のとき } 2a+1 > a$$

$$a = -1 \text{ のとき } 2a+1 = a$$

$$a < -1 \text{ のとき } 2a+1 < a \text{ であるから}$$

$$-1 < a < 1 \text{ のとき } a < x < 2a+1$$

$$a = -1 \text{ のとき 解なし}$$

$$a < -1 \text{ のとき } 2a+1 < x < a$$

④ $\frac{a}{x-1} - \frac{1}{x} > 0 \quad (x \neq 0, 1)$

両辺 $x^2(x-1)^2$ をかけて

$$ax^2(x-1) - x(x-1)^2 > 0, \quad x \neq 0, 1$$

$$(a-1)x^2 - (a-2)x - x > 0$$

① $a=1$ のとき

$$x^2 - x > 0$$

$$x(x-1) > 0 \quad \therefore x < 0, x > 1$$

② $a \neq 1$ のとき

$$x((a-1)x^2 - (a-2)x - 1) > 0$$

$$x((a-1)x+1)(x-1) > 0 \quad (x \neq 0, 1, -\frac{1}{a-1})$$

$$\cdot a > 1 \text{ のとき } (-\frac{1}{a-1} < 0 < 1)$$

$$-\frac{1}{a-1} < x < 0, x > 1$$

$$\cdot 0 < a < 1 \text{ のとき } (0 < 1 < -\frac{1}{a-1})$$

$$x < 0, 1 < x < -\frac{1}{a-1}$$

$$\cdot a = 0 \text{ のとき } (0 < 1 = -\frac{1}{a-1})$$

$$x < 0$$

$$\cdot a < 0 \text{ のとき } (0 < -\frac{1}{a-1} < 1)$$

$$x < 0, -\frac{1}{a-1} < x < 1$$

