

1.

(1) $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^2$ のとき, $g \circ f(x)$, $f \circ g(x)$ を求めよ.(2) $f(x) = x - 1$ ($x \geq 1$), $g(x) = \sqrt{x}$ とするとき, $g \circ f(x)$ を求めよ.(3) 実数 a に対して, $f(x) = ax + 2$ とする. $f(f(f(x)))$ が $f(x)$ の逆関数になるような a を求めよ.
(3) 早稲田大

[解]

① $g \circ f(x) = g(f(x))$

$$= \{f(x)\}^2$$

$$= (x-1)^2$$

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$= g(x) - 1$$

$$= x^2 - 1$$

② $g \circ f(x) = g(f(x))$ $f(x) \geq 0$ なので $g \circ f(x)$ は

$$= \sqrt{f(x)} \quad \text{定義できる}$$

$$= \sqrt{x-1}$$

③ $y = ax + 2$ の逆関数は

$$ax = y - 2$$

$$a = 0 \text{ のとき } y = 2$$

$$a \neq 0 \text{ のとき}$$

$$x = \frac{1}{a}y - \frac{2}{a}$$

$$x \text{ と } y \text{ を入れかえて}$$

$$y = \frac{1}{a}x - \frac{2}{a} = f^{-1}(x)$$

$$f(f(f(x))) = a f(f(x)) + 2$$

$$= a(a f(x) + 2) + 2$$

$$= a(a(ax+2)+2) + 2$$

$$= a^3x + 2a^2 + 2a + 2$$

$$f(f(f(x))) = f^{-1}(x) \text{ とするとき}$$

$$a = 0 \text{ のとき } f(f(f(x))) = 2 \text{ とするとき}$$

満たす.

$$a \neq 0 \text{ のとき}$$

$$\begin{cases} a^3 = \frac{1}{a} & \rightarrow a^4 = 1 \therefore a = \pm 1 \\ 2a^2 + 2a + 2 = -\frac{2}{a} & \rightarrow a^3 + a^2 + a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \dots \textcircled{1} \\ & \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } a = -1$$

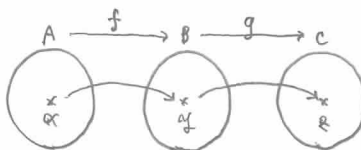
$$\therefore a = -1, 2$$

<point>

① 合成関数.

2つの関数 $y = f(x)$, $z = g(y)$ があり. $f(x)$ の値域が $g(y)$ の定義域に含まれているとき. $g(y)$ に $y = f(x)$ を代入すると新しい関数 $z = g(f(x))$ が得られる.この関数を $f(x)$ と $g(y)$ の合成関数という. $g(f(x))$ を $g \circ f(x)$ や $(g \circ f)(x)$ と表すこともある.

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$



2.

2つの関数

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < -1) \\ 0 & (-1 \leq x < 1) \\ x-1 & (1 \leq x) \end{cases}, g(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

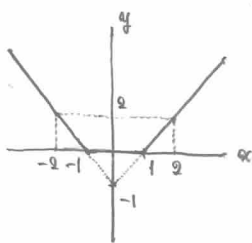
について,

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ.(2) 合成関数 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ を求め, $y = (g \circ f)(x)$ のグラフをかけ.(3) 合成関数 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ を求めよ.

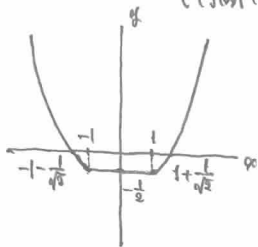
(甲南大)

[解]

(1)



$$(2) g \circ f(x) = g(f(x)) = \begin{cases} \{f(x)\}^2 - \frac{1}{2} = (x+1)^2 - \frac{1}{2} & (x < -1) \\ -\frac{1}{2} & (-1 \leq x < 1) \\ \{f(x)\}^2 - \frac{1}{2} = (x-1)^2 - \frac{1}{2} & (x \geq 1) \end{cases}$$



$$(3) f \circ g(x) = f(g(x))$$

・ $g(x) < -1$ とするのよ

$$x^2 - \frac{1}{2} < -1$$

$$x^2 < -\frac{1}{2} \quad \text{解なし}$$

・ $-1 \leq g(x) < 1$ とするのよ

$$\begin{cases} x^2 - \frac{1}{2} \geq -1 & \text{すべての実数} \\ x^2 - \frac{1}{2} < 1 & -\frac{\sqrt{6}}{2} < x < \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{6}}{2} < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{2} < x < \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ のとき } f(g(x)) = 0.$$

・ $g(x) \geq 1$ とするのよ

$$x^2 - \frac{1}{2} \geq 1 \quad \therefore x \leq -\frac{\sqrt{6}}{2}, x \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$x \leq -\frac{\sqrt{6}}{2}, x \geq \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ のとき } f(g(x)) = g(x) - 1 = x^2 - \frac{3}{2}$$

よ, τ

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 0 & (-\frac{\sqrt{6}}{2} < x < \frac{\sqrt{6}}{2}) \\ x^2 - \frac{3}{2} & (x \leq -\frac{\sqrt{6}}{2}, x \geq \frac{\sqrt{6}}{2}) \end{cases}$$

3.

関数 $f(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$ と $g(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ の合成関数 $(f \circ g)(x)$ は $(f \circ g)(x) = x$ を満たしている. このとき, a, b, c を求めよ. さらに, 合成関数 $(g \circ f)(x), (g \circ g)(x)$ を求めよ. (武蔵工業大)

[解]

$f \circ g(x) = f(g(x))$ が定義されるためには,

$f(x)$ は $x = -\frac{1}{2}$ で定義されないから

$$\frac{ax+1}{bx+c} \neq -\frac{1}{2} \quad (2(ax+1) + (bx+c) \neq 0)$$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{2g(x)-1}{2g(x)+1} \\ &= \frac{2(ax+1) - (bx+c)}{2(ax+1) + (bx+c)} = x \end{aligned}$$

$$(2a-b)x + 2 - c = (2a+b)x + (c+2)x$$

これは任意の x で成り立つためには

$$\begin{cases} 0 = 2a+b \\ 2a-b = c+2 \\ 2-c = 0 \end{cases}$$

$$\therefore a=1, b=-2, c=2$$

1.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (-1 \leq x \leq 0) \\ -2x+1 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases} \text{ のように定義された関数 } f(x) \text{ に}$$

ついて

(1) $y = (f \circ f)(x)$ のグラフをかけ.(2) $(f \circ f)(a) = f(a)$ となる a を求めよ.

(武蔵工業大)

[解]

$$(1) f \circ f(x) = f(f(x))$$

・ $-1 \leq f(x) \leq 0$ とするのとき

$$-1 \leq x \leq 0 \text{ のとき}$$

$$-1 \leq 2x+1 \leq 0$$

$$-2 \leq 2x \leq -1$$

$$\therefore -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき } f(f(x)) &= 2f(x)+1 \\ &= 2(2x+1)+1 \\ &= 4x+3 \end{aligned}$$

・ $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$-1 \leq -2x+1 \leq 0$$

$$-2 \leq -2x \leq -1$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$\begin{aligned} \text{このとき } f(f(x)) &= 2f(x)+1 \\ &= 2(-2x+1)+1 \\ &= -4x+3 \end{aligned}$$

・ $0 \leq f(x) \leq 1$ とするのとき・ $-1 \leq x \leq 0$ のとき

$$0 \leq 2x+1 \leq 1 \quad \therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq 0$$

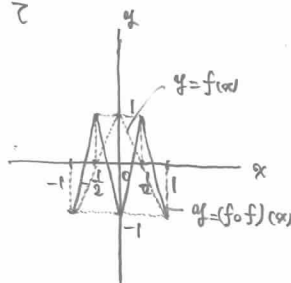
$$\begin{aligned} \text{このとき } f(f(x)) &= -2f(x)+1 \\ &= -2(2x+1)+1 \\ &= -4x-1 \end{aligned}$$

・ $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$0 \leq -2x+1 \leq 1 \quad \therefore 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき } f(f(x)) &= -2f(x)+1 \\ &= -2(-2x+1)+1 \\ &= 4x-1 \end{aligned}$$

よ、て



$$(2) (f \circ f)(a) = f(a) \text{ とする } a \text{ は}$$

 $y = (f \circ f)(x)$ と $y = f(x)$ の交点の x 座標に等しい

グラフより

$$a = -1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1$$

$\uparrow$
 $-4x+1 = 2x+1$

$\uparrow$
 $4x-1 = -2x+1$

2.

$$f(x) = x^2 - \frac{4}{5} \text{ とおく.}$$

(1) 2次方程式 $f(x) = x$ の2つの解を α, β ($\alpha < \beta$) とする. α, β の値を求めよ.

(2) (1) の α について, $f(f(\alpha))$ の値を求めよ.

(3) 関数 $f(f(x))$ を求めよ.

(4) 方程式 $f(f(x)) = x$ を解け.

(日本女子大)

【解】

$$(1) x^2 - \frac{4}{5} = x$$

$$5x^2 - 5x - 4 = 0$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{10}$$

$$\alpha = \frac{5 - \sqrt{105}}{10}, \quad \beta = \frac{5 + \sqrt{105}}{10} \quad "$$

(2) α は $f(x) = x$ の解であるから

$$f(\alpha) = \alpha \text{ より}$$

$$f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha = \frac{5 - \sqrt{105}}{10} \quad "$$

$$(3) f(f(x)) = \left\{ f(x) \right\}^2 - \frac{4}{5}$$

$$= \left(x^2 - \frac{4}{5} \right)^2 - \frac{4}{5}$$

$$= x^4 - \frac{8}{5}x^2 + \frac{4}{25} \quad "$$

$$(4) f(f(x)) = x$$

$$x^4 - \frac{8}{5}x^2 + \frac{4}{25} = x$$

$$25x^4 - 40x^2 + 4 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(2) \text{より } f(f(x)) = x$$

(1) 同様にして $f(f(\beta)) = \beta$ であるから

$x = \alpha, \beta$ は $f(f(x)) = x$ の解である.

よって①の左辺は $5x^2 - 5x - 4$ を

因数分解にもつから $\uparrow 5(x-\alpha)(x-\beta)$

$$(5x^2 - 5x - 4)(5x^2 + 5x + 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{10}, \quad \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10} \quad "$$

2.

関数 $f(x) = \sqrt{2x+15}$ に対して,(1) $f(-3)$, $f(f(-3))$ を計算せよ.(2) $f(f(x)) = f(x)$ を満たす x を求めよ.

(職業能力開発大)

[解]

(1) $f(-3) = 3$

$$f(f(-3)) = f(3) = \sqrt{21}$$

(2) $t = f(x)$ とおくと. $t \geq 0$ であり $f(x)$ は $x \geq -\frac{15}{2}$ で定義されるから $f(x)$ も $t \geq 0$ で定義される.

$$f(x) = t$$

$$\sqrt{2t+15} = t \quad (t \geq 0)$$

$$2t+15 = t^2, \quad t \geq 0$$

$$t^2 - 2t - 15 = 0$$

$$(t+3)(t-5) = 0$$

$$t \geq 0 \text{ より } t = 5$$

$$f(x) = 5$$

$$\sqrt{2x+15} = 5$$

$$2x+15 = 25, \quad x \geq -\frac{15}{2}$$

$$2x = 10 \quad \therefore x = 5$$

3.

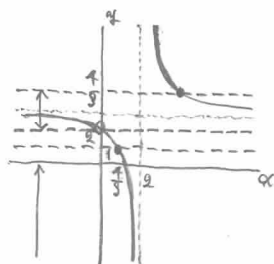
$$f(x) = \frac{3x-4}{x-2} \text{ とする.}$$

- (1) $y = f(x)$ のグラフを描け.
 (2) 不等式 $f(x) \geq x$ を解け.
 (3) 不等式 $f(f(x)) \geq f(x)$ を解け.

[解]

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= \frac{3x-4}{x-2} \\ &= \frac{3(x-2)+2}{x-2} \\ &= \frac{2}{x-2} + 3 \end{aligned}$$

$y = f(x)$ の漸近線は $x=2$, $y=3$



$$(2) \quad \frac{3x-4}{x-2} \geq x$$

$$(3x-4)(x-2) \geq x(x-2)^2, \quad x \neq 2$$

$$3x^2 - 10x + 8 \geq x^3 - 4x^2 + 4x$$

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 \leq 0$$

$$(x-1)(x-2)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore x \leq 1, 2 < x \leq 4$$

$$(3) \quad t = f(x) \text{ とおくと } t \neq \frac{4}{3}$$

$$f(x) \geq t, \quad t \neq \frac{4}{3}$$

$$\frac{3t-4}{t-2} \geq t$$

$$\therefore t \leq 1, 2 < t \leq 4$$

$$\therefore f(x) \leq 1, 2 < f(x) \leq 4$$

グラフより

$$x < 0, 1 \leq x < 2, 2 < x \leq 4$$