

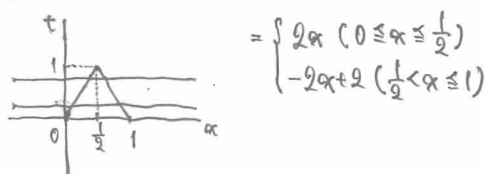
1.

関数 $f(x) = -|2x - 1| + 1$ ($0 \leq x \leq 1$) を用いて、関数 $g(x) = -|2f(x) - 1| + 1$ ($0 \leq x \leq 1$) を考える. $0 < c < 1$ のとき、 $g(x) = c$ を満たす x を求めよ.
(名古屋大)

[解]

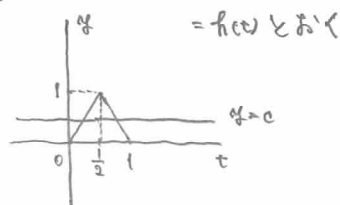
$t = f(x)$ とおく

$$f(x) = -|2x - 1| + 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$



グラフより $0 \leq t \leq 1$

$$g(x) = -|2t - 1| + 1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$



$g(x) = c$ を満たす t は

$$t = \frac{c}{2}, 1 - \frac{c}{2}$$

$f(x) = t$ より

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$2x = \frac{c}{2}, 1 - \frac{c}{2} \quad \therefore x = \frac{c}{4}, \frac{1}{2} - \frac{c}{4}$$

$\frac{1}{2} < x \leq 1$ のとき

$$-2x+2 = \frac{c}{2}, 1 - \frac{c}{2} \quad \therefore x = 1 - \frac{c}{4}, \frac{1}{2} + \frac{c}{4}$$

よって

$$x = \frac{c}{4}, \frac{1}{2} - \frac{c}{4}, \frac{1}{2} + \frac{c}{4}, 1 - \frac{c}{4}$$

[別解]

$$\begin{aligned} y = g(x) &= -|2(-|2x-1|+1)-1|+1 \\ &= -|-2|2x-1|+1|+1 \end{aligned}$$

と $y=c$ の交点として求める.

2.

$f(x) = -2|x-1| + 2$ とする.

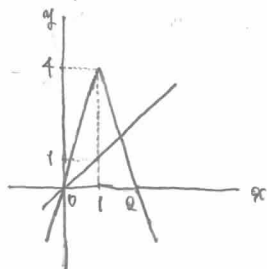
(1) $f(x) = x$ をみたす実数 x をすべて求めよ.

(2) $f(f(x)) = f(x)$ をみたす実数 x をすべて求めよ. (東京女子大)

[解]

$$(1) f(x) = -2|x-1| + 2$$

$$= \begin{cases} -2x+4 & (x \geq 1) \\ 2x & (x < 1) \end{cases}$$



$f(x) = x$ の解は $y = f(x)$ と $y = x$ の交点の x 座標に等しい.

$x \geq 1$ のとき

$$-2x+4 = x \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

$x < 1$ のとき

$$2x = x \quad \therefore x = 0$$

$$\therefore x = 0, \frac{4}{3}$$

$$(2) f(f(x)) = f(x)$$

$t = f(x)$ とおくと

$$f(t) = t \quad \therefore t = 0, \frac{4}{3}$$

$$f(x) = 0, \frac{4}{3} \quad \therefore x = 0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2$$

3.

$0 \leq x \leq 1$ で定義された関数 $f(x) = |2x - 1|$ について,

(1) $y = f(f(x))$ のグラフをかけ.

(2) $f(f(f(x))) = x$ となる x の個数を求めよ.

(北海道大)

[解]

$$(1) y = f(f(x))$$

$$= |2f(x) - 1|$$

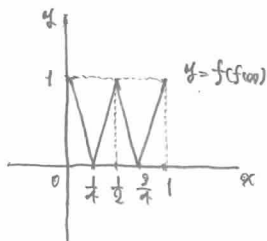
$$= |2|2x - 1| - 1| \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$y = |2x - 1| \text{ の}$$

① y 座標を 2 倍

② y 軸方向に -1 平行移動

③ $y < 0$ の部分を x 軸に関して対称に折り返す

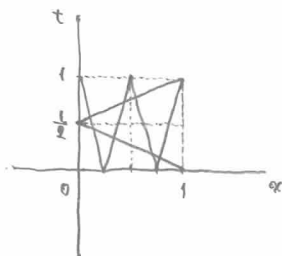


(2) $f(f(f(x))) = x$ の解は

$t = f(f(x))$ とおくと $f(t) = x$ なので.

$t = f(f(x))$ かつ $f(t) = x$ すなわち

$t = f(f(x))$ と $x = f(t)$ の交点の x 座標である.



グラフより 8 個.

[別解]

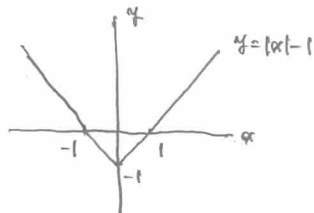
$y = f(f(f(x)))$ のグラフと $y = x$ の交点の個数を求めてもよい.

4.

実数 x に対して, $f_1(x) = |x| - 1$ とする. さらに, 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ と定義する. このとき, 方程式 $f_{2004}(x) = 0$ の解の個数を求めよ. (早稲田大)

[解]

$$f_1(x) = |x| - 1$$



$f_1(x) = 0$ の解の個数は

$y = f_1(x)$ と $y = 0$ (x 軸) との交点の個数
に等しいので 2 個. ($x = \pm 1$)

$f_2(x) = f_1(f_1(x))$ より

$$f_2(x) = 0$$

$$f_1(f_1(x)) = 0$$

$t_1 = f_1(x)$ とおくと

$$f_1(t_1) = 0 \quad \therefore t_1 = \pm 1$$

$$f_1(x) = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \downarrow 1 \end{matrix} \pm 1 \text{ より } 3 \text{ 個 } (x = 0, \pm 2)$$

$f_3(x) = f_1(f_2(x))$ より

$$f_3(x) = 0$$

$$f_1(f_2(x)) = 0$$

$t_2 = f_2(x)$ とおくと

$$f_1(t_2) = 0 \quad \therefore t_2 = \pm 1$$

$$t_2 = 1 \text{ のとき} \quad t_2 = -1 \text{ のとき}$$

$$f_2(x) = 1 \quad f_2(x) = -1$$

$$f_1(f_2(x)) = 1 \quad f_1(f_2(x)) = -1$$

$$f_1(t_1) = 1 \quad f_1(t_1) = -1$$

$$t_1 = -2, 2 \quad t_1 = 0$$

$$x \text{ は } \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 \pm 2 \pm & 2 \pm & 2 \pm \end{matrix}$$

4 個 ($x = \pm 1, \pm 3$)

$$f_4(x) = 0$$

同様に $t_n = f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3$) とおくと

$$t_3 = \pm 1$$

$$t_2 = 0, \pm 2$$

$$t_1 = \pm 1, \pm 3$$

$$x = 0, \pm 2, \pm 4 \quad 5 \text{ 個}$$

これをくり返して

$f_{2004}(x) = 0$ の解の個数は 2005 個.
($x = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2004$)

注

t_n と t_{n-1} の対称性に注意する

$t_n > -1$ のときは 1 つの t_n に対し 2 つの t_{n-1}

$$t_n = -1 \quad 1$$

$$t_n < -1 \quad 0$$

[別解]

$y = f_{2004}(x)$ のグラフと x 軸との交点で考える.

5.

0 以上の実数全体で定義された関数 $f_n(x)$ を次のように帰納的に定める.

$$f_1(x) = ||x-1|-1|,$$

$$f_{n+1}(x) = ||f_n(x) - (n+1)| - (n+1)| \quad (n \geq 1)$$

このとき

(1) $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ のグラフをかけ.

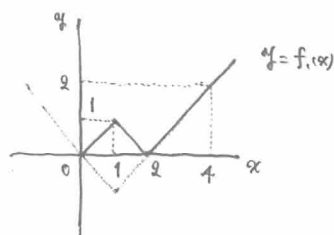
(2) $f_n(x) = 0$ となる x をすべて求めよ.

(3) $y = f_n(x)$ のグラフの概形をかけ.

(お茶の水女子大)

[解]

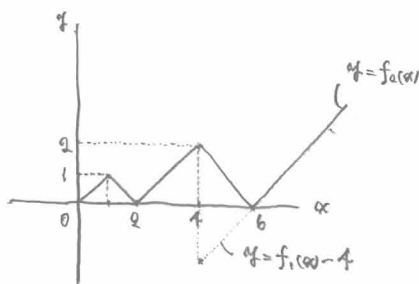
$$(1) f_1(x) = ||x-1|-1|$$



$$f_2(x) = ||f_1(x) - 2| - 2|$$

$$= \begin{cases} |f_1(x) - 4| & (f_1(x) \geq 2) \\ |-f_1(x)| & (f_1(x) < 2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} |f_1(x) - 4| & (x \geq 4) \\ f_1(x) & (0 \leq x < 4) \end{cases} \quad \text{上図より}$$



$$(2) f_{n+1}(x) = ||f_n(x) - (n+1)| - (n+1)|$$

$$= \begin{cases} |f_n(x) - 2(n+1)| & (f_n(x) \geq n+1) \\ |-f_n(x)| & (f_n(x) < n+1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} |f_n(x) - 2(n+1)| & (f_n(x) \geq n+1) \\ f_n(x) & (f_n(x) < n+1) \end{cases}$$

∴

$$x = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \\ = k(k+1), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

