

1.

次の極限值を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 2)(3x - 1)$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2}$

[解]

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 2)(3x - 1)$

$$= 4 \cdot 5 = 20$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} \quad (= \frac{0}{0} \text{ 不定形})$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\cancel{x-1})}{(x+2)(\cancel{x-1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{3}$$

<point>

① 極限値の性質 (復習)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta \text{ のとき}$$

1. $\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \alpha \quad (k: \text{定数})$

2. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$

3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \alpha \beta$

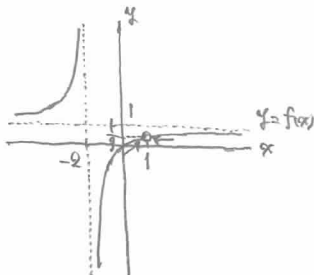
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$

② ②) について

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} \quad (x \neq -2, 1)$$

$$= \frac{x(\cancel{x-1})}{(x+2)(\cancel{x-1})}$$

$$= \frac{-2}{x+2} + 1$$



2.

極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{32^x - 1}{8^x - 1}$ を求めよ.

[解]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{32^x - 1}{8^x - 1} \quad (= \frac{0}{0} \text{ 不定形})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^5)^x - 1}{(2^3)^x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)(2^{4x} + 2^{3x} + 2^{2x} + 2^x + 1)}{(2^x - 1)(2^{2x} + 2^x + 1)}$$

$$= \frac{5}{3}$$

3.

$f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx - 2}{x^2 - 3x + 2}$ とする. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ がともに有限の値であるとき, a, b を求めよ. (工学院大)

[解]

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2) = 0 \text{ より}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax^2 + bx - 2) = 0 \text{ であることが必要}$$

$$a + b - 1 = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2) = 0 \text{ より}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax^2 + bx - 2) = 0 \text{ であることが必要}$$

$$4a + 2b + 6 = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より}$$

$$a = -4, b = 5$$

このとき

因数定理

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

よりともに有限の値である。

<point>

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ とする}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

[証明.]

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = \alpha \cdot 0 = 0 \text{ である。}$$

← 1.2 例.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-a+\beta)}{x-a} \quad (\beta \neq 0) \text{ は}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a)(x-a+\beta) = 0 \text{ である。}$$

$$x \rightarrow a \text{ とすると } \rightarrow \beta (\neq 0)$$

また

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{(x-a)^2} \text{ は}$$

$$x \rightarrow a+0 \text{ で } \rightarrow \infty$$

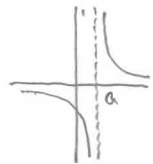
$$x \rightarrow a-0 \text{ で } \rightarrow -\infty \text{ である。}$$

$x \rightarrow a$ で有限値は存在しない。

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{(x-a)^3} = \infty$$

注.

逆も必ずしも成り立たない。



4.

次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

[解]

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \left(= \frac{0}{0} \text{ 不定形} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x-1}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 2.$$

[別解]

$$x-1 = (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) \text{ と因数分解する.}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} \left(= \frac{0}{0} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-(1-x)}{x(1+\sqrt{1-x})} \leftarrow \text{分母・分子に } 1+\sqrt{1-x} \text{ を乗じる}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}.$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \left(= \frac{0}{0} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}.$$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} \left(= \frac{0}{0} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3}.$$

[別解]

$$x-1 = (\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1) \text{ と因数分解する.}$$

5.

(1) $f(x) = \frac{\sqrt{a+x}-2}{x}$ が $x \rightarrow 0$ のとき収束するように、定数 a の値を定めよ。また、そのときの $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ を求めよ。

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x+7}+b}{x-2} = 1$ が成立するとき、 a, b の値を求めよ。

((2) 関西大)

[解]

① 分母 $\rightarrow 0$ であるから

分子 $\rightarrow 0$ となることが必要

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{a+x}-2) = 0$$

$$\sqrt{a}-2=0 \quad \therefore a=4$$

このとき

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4+x)-4}{x(\sqrt{4+x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって $a=4$ のとき、 $\frac{1}{4}$ に収束する。

② 分母 $\rightarrow 0$ であるから

分子 $\rightarrow 0$ となることが必要。

$$\lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x+7}+b) = 0$$

$$3a+b=0 \quad \therefore b=-3a \quad \text{①}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x+7}+b}{x-2} &\stackrel{\text{①より}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{x+7}-3)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\{\{x+7\}-9\}}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{\sqrt{x+7}+3} \\ &= \frac{a}{6} = 1 \quad \therefore a=6 \end{aligned}$$

$$\text{①より } b=-18$$

注.

極限値が1となるように、 a, b を

決めたので、逆を問うる必要はない。

心算によりは、このとき $\lim_{x \rightarrow 2} \square = 1$ となる

とでも書いておけばよい。5

6.

次の極限を調べよ。極限が存在する場合には、その極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

[解答]

(1) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = \infty$ より

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} \text{ であるから}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ は存在しない。}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} = \infty, \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^2} = \infty$ より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

(3) $\lim_{x \rightarrow +0} |x| = \lim_{x \rightarrow +0} x = 0 \leftarrow |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -0} |x| = \lim_{x \rightarrow -0} (-x) = 0 \text{ より}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

(4) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} 1 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} \text{ であるから}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \text{ は存在しない。}$$

<point>

① 右側極限・左側極限

関数 $f(x)$ において、 x が $x > a$ を満たし、 a に限りなく近づくときの極限を右側極限といい、

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$
 と表す。

同様に $x < a$

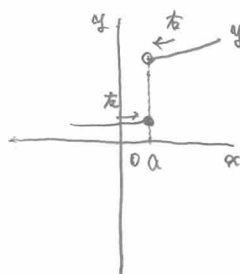
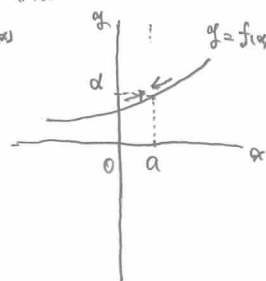
左側極限といい

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$
 と表す。

とくに $a=0$ のときは、 $x \rightarrow a+0$ を $x \rightarrow +0$ と表し、 $x \rightarrow a-0$ を $x \rightarrow -0$ と表す。

② $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = d \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = d$

注、

 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ がともに存在しても、それらが異なるならば、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は存在しない。 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は存在しない $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = d$

7.

次の極限を調べよ。極限が存在する場合には、その極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{|x - 3|} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}+0} \frac{x^2 - 2}{|x^2 - 3\sqrt{2}x + 4|} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 1-0} ([2x] - 2[x])$$

[1]

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x^2 - 3x}{|x - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x(x-3)}{x-3} = 3$$

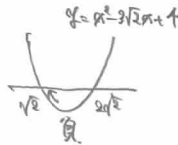
$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x^2 - 3x}{|x - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x(x-3)}{-(x-3)} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x^2 - 3x}{|x - 3|} \neq \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x^2 - 3x}{|x - 3|} \text{ より}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{|x - 3|} \text{ は存在しない。}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}+0} \frac{x^2 - 2}{|x^2 - 3\sqrt{2}x + 4|}$$



$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}+0} \frac{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})}{-(x - \sqrt{2})(x - 2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1-0} ([2x] - 2[x])$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} (1 - 2 \cdot 0) = 1$$

8.

次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{3x^2 + 5}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5}{x + 1}$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 1)$

[解]

<point>

① $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ の極限

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{3x^2 + 5}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}{3 + \frac{5}{x^2}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{分母・分子を分母の最高} \\ \text{次項で割る} \end{array}$$

$$= \frac{2}{3}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$

 $x = -t$ とおくと $t \rightarrow \infty$ より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^2 + 3t + 1}{t^2 + 1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}}$$

$$= 2$$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5}{x + 1}$

 $x = -t$ とおくと $t \rightarrow \infty$ より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 - 5}{-t + 1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t - \frac{5}{t}}{-1 + \frac{1}{t}}$$

$$= -\infty$$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 1)$

 $x = -t$ とおくと $t \rightarrow \infty$ より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (-t^3 + 2t^2 - 1)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} t^3 \left(-1 + \frac{2}{t} - \frac{1}{t^3} \right)$$

$$= -\infty$$

9.

次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$

[解]

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ ($= \infty - \infty$ 不定形)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \leftarrow \text{分子有理化}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \leftarrow \text{分母分子を } x \text{ で割る}$$

$$= \frac{1}{2}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$

 $x = -t$ とおくと $t \rightarrow \infty$ より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 + 1} - t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t^2 + 1) - t^2}{\sqrt{t^2 + 1} + t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1} + t}$$

$$= 0$$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$

 $x = -t$ とおくと $t \rightarrow \infty$ より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - t + 1} - \sqrt{t^2 + t + 1})$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t^2 - t + 1) - (t^2 + t + 1)}{\sqrt{t^2 - t + 1} + \sqrt{t^2 + t + 1}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t}{\sqrt{t^2 - t + 1} + \sqrt{t^2 + t + 1}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}}}$$

$$= -1$$

10.

(1) $x \rightarrow \infty$ のとき, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - ax$ が収束するような, 定数 a の値を求めよ. また, そのときの $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ.

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - bx) = 2$ のとき, $(a, b) = \boxed{}$ である.

((2) 京都産業大)

[解]

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - ax) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) - a^2 x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + ax} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - a^2)x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - a^2)x + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + a} \end{aligned}$$

これを収束するためには

$$1 - a^2 = 0 \quad \therefore a = \pm 1 \text{ が必要.}$$

(i) $a = 1$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0 \text{ (収束)}$$

(ii) $a = -1$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \infty \text{ (発散)}$$

よって

$$a = 1 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - bx)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + ax) - b^2 x^2}{\sqrt{x^2 + ax} + bx} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - b^2)x^2 + ax}{\sqrt{x^2 + ax} + bx} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - b^2)x + a}{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} + b} \end{aligned}$$

これを収束するためには

$$1 - b^2 = 0 \quad \therefore b = \pm 1 \text{ が必要.}$$

(i) $b = 1$ のとき

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} + x) \\ &= \frac{a}{2} = 2 \quad \therefore a = 4 \end{aligned}$$

(ii) $b = -1$ のとき

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{a}{x}} - 1 \right) = \infty \text{ 不適} \end{aligned}$$

(i), (ii) より

$$(a, b) = \boxed{(4, 1)}$$

11.

極限值 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x}$ を求めよ.

[解]

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$x > 0$ のとき $\leftarrow x \rightarrow +\infty$ であるから
 $x > 0$ としてよい.

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ であるから}$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

<point>

① 関数の極限と大小関係

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta \text{ とする.}$$

1. x が a に近いとき.

$$\text{常に } f(x) \leq g(x) \Rightarrow \alpha \leq \beta$$

2. x が a に近いとき

$$\text{常に } f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ かつ } \alpha = \beta$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha \text{ (はさみうちの原理)}$$

注

これは $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ でも成り立つ

$x \rightarrow \infty$ のときは x が十分大きい x で

$$\text{常に } f(x) \leq g(x) \Rightarrow \alpha \leq \beta \text{ とすればよい.}$$

12.

極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x}$ を求めよ.

[解]

$$[x] \leq x < [x] + 1 \text{ より}$$

$$x - 1 < [x] \leq x$$

$x > 0$ のとき

$$1 - \frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \text{ であるから}$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = 1.$$