

1.

次の関数を定義にしたがって微分せよ.

(1) $y = \frac{1}{x}$

(2) $y = \sqrt{x}$

[解]

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$ とおく

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \quad (= \frac{0}{0}) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{h x (x+h)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} \\
 &= -\frac{1}{x^2} \quad (= -x^{-2})
 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$ とおく.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad (= \frac{0}{0}) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}})
 \end{aligned}$$

<point>

① 微分の定義.

関数 $f(x)$ が、ある区間 I で微分可能であるとき、各々の $a \in I$ に対して $f(x)$ を対応させると一つの新しい関数 $f'(x)$ が与えられる. この $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数といい、 $f(x)$ から $f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を x について微分するという.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$y = f(x)$ の導関数の記号は $f'(x)$ の他に

$$y', \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx} f(x)$$

などを用いられる

* 微分可能については後に扱います.

とりあえず微分ができるとき位に捉えておいて下さい.

2.

$f(x)$ および $g(x)$ は $x = a$ で微分可能な関数とする. このとき, 極限値 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h)g(a+5h) - f(a)g(a)}{h}$ を $f(a)$, $g(a)$ および微分係数 $f'(a)$, $g'(a)$ を用いて表せ. (東京理科大)

[解]

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h)g(a+5h) - f(a)g(a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h)g(a+5h) - f(a)g(a+5h) + f(a)g(a+5h) - f(a)g(a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+3h) - f(a)}{3h} g(a+5h) \cdot 3 + f(a) \cdot \frac{g(a+5h) - g(a)}{5h} \cdot 5 \right\} \\
 &= 3f'(a)g(a) + 5f(a)g'(a)
 \end{aligned}$$

3.

関数 $y = (x^2 - 1)(2x + 3)$ を微分せよ.

[解]

$$y = (x^2 - 1)(2x + 3)$$

$$y' = (x^2 - 1)'(2x + 3) + (x^2 - 1)(2x + 3)'$$

$$= 2x(2x + 3) + 2(x^2 - 1)$$

$$= 6x^2 + 6x - 2.$$

<point>

① 定数倍、和の微分法 (線形性)

$$1. \{kf(x)\}' = k f'(x) \quad (k: \text{定数})$$

$$2. \{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$$

② 積の微分法

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

証明は数学Ⅱ参照.

4.

x の関数 u, v, w について, 次の等式を示せ.

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

[解]

$$\begin{aligned} (uvw)' &= \{(uv)w\}' \\ &= (uv)'w + (uv)w' \\ &= (u'v + uv')w + uvw' \\ &= u'vw + uv'w + uvw' \quad \square \end{aligned}$$

5.

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \frac{x^2}{x-1}$

(2) $y = \frac{x}{1+x^2}$

[解]

$$\begin{aligned} \text{① } y' &= \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } y' &= \frac{(x)'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 1}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

<point>

① 商の微分法

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad (g(x) \neq 0)$$

[証明]

$$p(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ とおす}$$

$$\begin{aligned} p'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+h) - g(x))}{h g(x+h)g(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad \square \end{aligned}$$

6.

I. n が整数のとき, $(x^n)' = nx^{n-1}$ が成り立つことを示せ.

II. 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \frac{1}{x}$

(2) $y = \frac{1}{x^2}$

(3) $y = \frac{1}{x^3}$

(4) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

[解].

I. $f(x) = x^n$ とおくi) $n \geq 1$ のとき

2-頁定理を用いて各自.

数学的帰納法でもできます.

ii) $n = 0$ のとき

$$f(x) = 1$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

iii) $n \leq -1$ のとき $-f'(x) = nx^{n-1} = 0$ より $x \neq 0$ 且

$$n = -m \quad (m \in \mathbb{N}) \text{ とおく}$$

$$f(x) = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

$$f'(x) = \frac{(1)' \cdot x^{-m} - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2} \leftarrow \text{商の微分法}$$

$$= - \frac{m x^{m-1}}{x^{2m}}$$

$$= -m x^{-m-1}$$

$$= m x^{n-1} \leftarrow n = -m$$

iv) ~ iii) より

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

* $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \rightarrow n \in \mathbb{Z}$ に拡張された.II. d) $y = x^{-1}$

$$y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

(2) $y = x^{-2}$

$$y' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(3) $y = x^{-3}$

$$y' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

(4) $y = x^{-2} + 3x^{-3}$

$$y' = -2x^{-3} - 9x^{-4} = -\frac{2}{x^3} - \frac{9}{x^4}$$

7.

次の関数を微分せよ。

(1) $y = (x^3 + 1)^2$

(2) $y = \frac{1}{(2x+1)^2}$

[解法]

(1) $y = (x^3 + 1)^2 \quad (u = x^3 + 1)$

$$= u^2$$

$$y' = 2u \cdot u'$$

$$y' = 2(x^3 + 1) \cdot (x^3 + 1)'$$

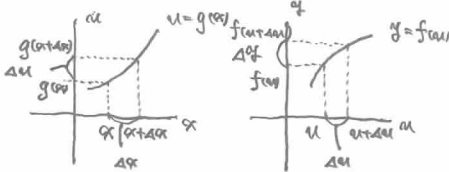
$$= 6x^2(x^3 + 1)$$

(2) $y = (2x+1)^{-2}$

$$y' = -2(2x+1)^{-3} \cdot (2x+1)'$$

$$= -\frac{4}{(2x+1)^3}$$

イメージ

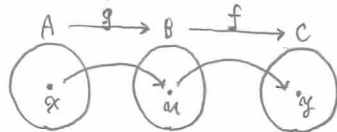
 Δx によって Δu が決まりその Δu によって Δy が決まる当然 $\Delta x \rightarrow 0$ ならば $\Delta u \rightarrow 0$

<point>

① 合成関数

 $y = f(u)$ か u の関数で、 $u = g(x)$ か x の関数のとき $y = f(g(x))$ を関数 $y = f(u)$, $u = g(x)$ の合成関数

という。



② 合成関数の微分法

 $y = f(u)$ か u の関数として $u = g(x)$ か x の関数として微分可能であるとき、 $y = f(g(x))$ も微分可能で、

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

[証明] x を Δx だけ変化させたときの u と y の変化量をそれぞれ

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

$$\{f(g(x))\}' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta u \rightarrow 0$ より $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$

$$= f'(u) g'(x)$$

$$= f'(g(x)) g'(x)$$

注、 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ をそれぞれ x の関数として

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \leftarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \text{ とおく}$$

ともかく、

8.

(1) 関数 $y = \sqrt{x}$ の導関数を, 逆関数の微分法を用いて求めよ.(2) $x = y\sqrt{1+y}$ のとき, $\frac{dy}{dx}$ を y で表せ.

[解]

(1) $y = \sqrt{x} \quad (y \geq 0)$

$x = y^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$= \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(2) $x = y\sqrt{1+y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$= \frac{1}{1 \cdot \sqrt{1+y} + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+y}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{1+y}}{2(1+y) + y}$$

$$= \frac{2\sqrt{1+y}}{3y+2}$$

<point>

① 逆関数.

関数 $y=f(x)$ の値域に含まれる任意の y に対して, 対応する x の値が1つに定まるとき x は y の関数 $x=g(y)$ と考えられる.

こうして定まる関数を $y=f(x)$ の逆関数という. 逆関数 $x=g(y)$ は x と y を入れかえて, $y=g(x)$ のように x の関数の形で書くことが多く, これを $y=f(x)$ と表す.

② 逆関数の微分法

$y=f(x)$ の逆関数を $y=g(x)$ とするとき

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} \quad (g'(y) \neq 0)$$

[証明].

$y=f(x)$ の逆関数が $y=g(x)$ より

$y=f(x)$ を x について解くと $x=g(y)$

$$x=g(y)$$

$$=g(f(x))$$

両辺 x で微分すると

$$1 = g'(f(x)) \cdot f'(x) \leftarrow \text{合成関数の微分}$$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$$

$$= \frac{1}{g'(y)} \leftarrow y=f(x)$$

$y=f(x)$ を
 x と y を

互に

これ

を

と

も

か

く

。

。

。

。

。

。

$x=g(y)$ を
 y と x を

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

ともかく。

9.

(1) n を正の整数とすると、 $y = x^{\frac{1}{n}}$ の導関数を、逆関数の微分法を用いて求めよ。

(2) $x = y^2 + 2y + 1$ ($y < -1$) について $\frac{dy}{dx}$ を x で表せ。 ((2) 関西大)

[解]

$$(1) y = x^{\frac{1}{n}}$$

$$x = y^n$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$= \frac{1}{ny^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$(2) x = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2$$

$$\therefore y+1 = -\sqrt{x} \quad (y < -1 \text{ より})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$= \frac{1}{2(y+1)}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

10.

I. r が有理数のとき, $(x^r)' = rx^{r-1}$ が成り立つことを示せ.

II. 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

(2) $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

(3) $y = \frac{x^2 - x + 4}{\sqrt{x}}$

(4) $y = \sqrt{2x-3}$

(5) $y = \sqrt{x^2+1}$

(6) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(7) $y = (x+3)\sqrt{2-x}$

(8) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

[解]

I. $r \in \mathbb{Q}$ より $r = \frac{n}{m}$ ($m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$)

とおく

$$y = x^r = x^{\frac{n}{m}}$$

$$y^m = x^n$$

両辺 x で微分して

$$my^{m-1} \cdot y' = nx^{n-1}$$

$$y' = \frac{n}{m} \cdot \frac{x^{n-1}}{y^{m-1}}$$

$$= \frac{n}{m} \cdot \frac{x^{n-1}}{(x^{\frac{n}{m}})^{m-1}}$$

$$= \frac{n}{m} \cdot \frac{x^{n-1}}{x^{n-\frac{n}{m}}}$$

$$= \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$$

$$= rx^{r-1} \quad \leftarrow r = \frac{n}{m}$$

* $n \in \mathbb{Z} \rightarrow n \in \mathbb{Q}$ に拡張された.

II. d) $y = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad (= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})$$

e) $y = x^{-\frac{3}{2}}$

$$y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

f) $y = x^{\frac{3}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

g) $y = (2x-3)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2}(2x-3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

h) $y = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

i) $y = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

$$y' = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

j) $y' = 1 \cdot \sqrt{2-x} + (x+3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \cdot (-1)$

$$= \frac{2(2-x) - (x+3)}{2\sqrt{2-x}} = \frac{-3x+1}{2\sqrt{2-x}}$$

k) $y' = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)}$

$$= \frac{(x^2+1) - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

11.

x と y の関係が次のように与えられているとき, $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

(1) $x^2 + y^2 = 1$

(2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(3) $y^2 - 2x^2 = 1$

(4) $y^2 = 4x$

(5) $x^2 + xy + 2y^2 = 1$

[解]

(1) $x^2 + y^2 = 1$

両辺 x で微分して

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$((x, y) \neq (\pm 1, 0))$$

(2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

両辺 x で微分して

$$\frac{2}{9}x + \frac{1}{2}y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y} \quad (y \neq 0)$$

(3) $y^2 - 2x^2 = 1$

両辺 x で微分して

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} - 4x = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} \quad (y \neq 0)$$

(4) $y^2 = 4x$

両辺 x で微分して

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = 4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} \quad (y \neq 0)$$

(5) $x^2 + xy + 2y^2 = 1$

両辺 x で微分して

$$2x + y + x \cdot \frac{dy}{dx} + 4y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x + 4y) \frac{dy}{dx} = -(2x + y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 4y} \quad (x + 4y \neq 0)$$

<point>

① 陰関数.

y が x の関数として明示的に解かれておらず, x, y の関係式が与えられているものを陰関数表示という.

② 陰関数の微分