

1.

関数 $f(x) = \frac{a \cdot 2^x + b \cdot 2^{-x}}{(a+1) \cdot 2^x + (b+1) \cdot 2^{-x}}$ について, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{3}$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{4}$ が成り立つとき, 定数 a, b の値を求めよ.

(東京都市大)

[解]

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \cdot 2^x + b \cdot 2^{-x}}{(a+1) \cdot 2^x + (b+1) \cdot 2^{-x}} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + b \cdot \frac{1}{2^{2x}}}{(a+1) + (b+1) \cdot \frac{1}{2^{2x}}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{分子分母を } 2^x \text{ で} \\ \text{わる} \end{array} \\ = \frac{a}{a+1} = \frac{1}{3} \\ 3a = a+1 \quad \therefore a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ は

$x = -t$ とおくと $t \rightarrow \infty$ より

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a \cdot 2^{-t} + b \cdot 2^t}{(a+1) \cdot 2^{-t} + (b+1) \cdot 2^t} \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a \cdot \frac{1}{2^t} + b}{(a+1) \cdot \frac{1}{2^t} + (b+1)} \\ = \frac{b}{b+1} = \frac{1}{4} \\ 4b = b+1 \quad \therefore b = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ を示せ.}$$

(2) (1) を利用して、次の極限値を求めよ.

$$(i) \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

$$(ii) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

[解]

d) $n \leq x < n+1$ とすると ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

$$(1 <) 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= 1 \cdot e = e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

であるからはさみうちの原理より $\leftarrow n \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e,$$

$$(2) (i) h = \frac{1}{x} \text{ とおくと } (x = \frac{1}{h})$$

$$\begin{cases} h \rightarrow +0 \\ \frac{1}{x} \rightarrow +0 \\ x \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \\ &= e \end{aligned}$$

$$3 \text{ で示す } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e \text{ も}$$

言えるので

$$\begin{cases} h \rightarrow -0 \\ \frac{1}{x} \rightarrow -0 \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\begin{aligned} (ii) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \log(1+h)^{\frac{1}{h}} \\ &= \log e = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \\ t = e^x - 1 \text{ とおくと } (x = \log(1+t)) \\ \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ e^x - 1 \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{cases} \quad \wedge e^x = 1+t \text{ となる.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log(1+t)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log(1+t)}{t}} \\ &= \frac{1}{1} = 1, \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e,$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ を示せ.}$$

[証明]

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$x = -t$ とおくと $t \rightarrow \infty$ より

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t \quad t = t-1+1 \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) \\ &= e \cdot 1 = e \quad \square. \end{aligned}$$

4.

次の極限値を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+3}\right)^x \quad (3) \lim_{h \rightarrow 0} (1-2h)^{\frac{1}{h}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \{\log(x+1) - \log x\} \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{x} \quad ((2) \text{ 東京理科大})$$

[例] 4.1

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}} \right\}^3$$

$$= e^3$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+3}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{6}{x-3}\right)^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{6}{x-3}\right)^{x-3} \cdot \left(1 + \frac{6}{x-3}\right)^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left\{ \left(1 + \frac{1}{\frac{x-3}{6}}\right)^{\frac{x-3}{6}} \right\}^6 \cdot \left(1 + \frac{6}{x-3}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{e^6}$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} (1-2h)^{\frac{1}{h}}$$

$t = -2h$ とおくと ($h = -\frac{t}{2}$)

$$\begin{cases} h \rightarrow 0 \\ -2h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^2}$$

$$= \frac{1}{e^2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \{\log(x+1) - \log x\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \frac{x+1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \log e = 1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \log \left\{ \left(1 + \frac{2}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}} \right\}^2$$

$$= \log e^2 = 2$$

[例] 4.2

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$$

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{t} \text{ とおく } x = 3t \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{1.2.1から同様1形} \\ \text{にあてはめる} \end{array}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow \infty \\ 3t \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{3t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right\}^3 = e^3$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{6}{x-3}\right)^x}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{6}{x-3} \text{ とおく } (x = 6t+3)$$

$$\begin{cases} x \rightarrow \infty \\ 6t+3 \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{6t+3}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left\{ \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right\}^6 \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{e^6}$$

5.

h を実数として $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ ($a > 0, a \neq 1$) なる極限値の存在が証明される。ここで、 a を 1 に近くとると、この極限値は 0 に近く、 a を非常に大きくとると、この極限値も大きい。よってこの極限値がちょうど 1 になるように底 a を選ぶことができる。このようにして選ばれた a をあらためて e と書き、自然対数の底という。以上のことを既知として、次の (1), (2) を証明せよ。

$$(1) (e^x)' = e^x$$

$$(2) (\log x)' = \frac{1}{x}$$

[解]

① 題意より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$f(x) = e^x \text{ とおく}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\ &= e^x \cdot 1 = e^x \quad \square \end{aligned}$$

$$\text{② } y = \log x \text{ とおく}$$

$$x = e^y$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \\ &= \frac{1}{e^y} \\ &= \frac{1}{x} \quad \square \end{aligned}$$

<point>

① e の定義.問題のように e を定義してもよい。ここでは $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ と e を定義

してそれを出発点としたが、問題②

の極限 $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^x = e, \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \text{ など(可換}$$

なのでこれを定義としてもよい。

② 指数・対数関数の微分法.

問題②の2つの公式のほかに、次の4つを覚えておこう。

$$\text{③ } (a^x)' = a^x \log a$$

$$\text{④ } (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

$$\text{⑤ } (\log |x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\text{⑥ } (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \log a}$$

[証明]

$$\text{③ } f(x) = a^x \text{ とおく}$$

$$\begin{aligned} &= (e^{\log a})^x \leftarrow a^{\log a M} = M \\ &= e^{(\log a)x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{(\log a)x} \cdot \{(\log a)x\}' \\ &= a^x \log a \quad \square \end{aligned}$$

$$\text{④ } f(x) = \log_a x \text{ とおく}$$

$$= \frac{\log x}{\log a}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \log a} \quad \square$$

$$\text{⑤ } x > 0 \text{ のとき}$$

$$(\log |x|)' = (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$x < 0 \text{ のとき}$$

$$(\log |x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$$

よって

$$(\log |x|)' = \frac{1}{x} \quad \square$$

$$\text{⑥ 同様}$$

6.

次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1}$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\{\log(x+1) - \log x\}$

[例]]

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}(e^{2x}-1)}{x} (= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}(e^{2x}-1)}{2x} \cdot 2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2)$

$f(x) = e^{2x}$ とおくと $f'(x) = 2e^{2x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}(f(x)-f(0))}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{2x} \frac{f(x)-f(0)}{x} \leftarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} \text{ と } x \rightarrow 0$

$= e^0 \cdot f'(0) = 2$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x}$

$f(x) = 3^x$ とおくと $f'(x) = 3^x \log 3$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$

$= f'(0)$

$= \log 3$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}$

$f(x) = e^{x^2}$ とおくと $f'(x) = 2e^{x^2}x$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)-f(0)}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}$

$= \frac{f'(0)}{\frac{1}{2}} = 2$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}$

$f(x) = \log x$ とおくと $f'(x) = \frac{1}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leftarrow f(1) = 0$

$= f'(1) = 1$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\{\log(x+1) - \log x\}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$t = \frac{1}{x}$ とおくと $t \rightarrow 0$ ($x = \frac{1}{t}$)

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sin \log(1+t)$

$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \log(1+t)}{\log(1+t)} \cdot \frac{\log(1+t)}{t}$

$= 1 \cdot 1 = 1$

<point>

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ の見方.

これは1となるp-忘れか. 2のて.

$f(x) = e^x$ とおくと $f'(x) = e^x$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$

$= f'(0)$

$= e^0 = 1$

と見てもよい.

7.

連続関数 $f(x)$ が $x = a$ ($a \neq 0$) で微分可能であるとき、極限值

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{ae^{f(x)} - xe^{f(a)}}{x^2 - a^2}$$

を求めよ。ただし、 e は自然対数の^底定を表す。

(武蔵工業大)

[解]

$$g(x) = e^{f(x)} \text{ とおくと } g'(x) = e^{f(x)} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{ag(x) - xg(a)}{x^2 - a^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{ag(x) - ag(a) - xg(a) + ag(a)}{x^2 - a^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{a}{x+a} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a} - \frac{g(a)}{x+a} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} g'(a) - \frac{1}{2} g(a)$$

$$= \frac{1}{2} e^{f(a)} f'(a) - \frac{1}{2} e^{f(a)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{f(a)} (f'(a) - 1)$$

8.

次の関数を微分せよ.

(1) $y = e^x - e^{-x}$

(2) $y = e^{x^2+x+1}$

(3) $y = e^{\sin x}$

(4) $y = 2^x$

(5) $y = 3^{2x}$

(6) $y = x^2 e^x$

(7) $y = e^x \cos x$

(8) $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$

[解答]

(1) $y' = e^x + e^{-x}$

(2) $y' = e^{x^2+x+1} \cdot (2x+1)$
 $= (2x+1) e^{x^2+x+1}$

(3) $y' = e^{\sin x} \cdot \cos x$

(4) $y' = 2^x \log 2$

(5) $y' = 3^{2x} \log 3 \cdot 2$
 $= 2 (\log 3) \cdot 3^{2x}$

(6) $y' = 2x e^{x^2} + x^2 e^x$
 $= x(x+2) e^x$

(7) $y' = e^x \cos x + e^x (-\sin x)$
 $= e^x (\cos x - \sin x)$

(8) $y' = \frac{e^x (e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$
 $= \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

9.

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \log 2x$

(2) $y = \log |\cos x|$

(3) $y = (\log x)^2$

(4) $y = \log_3 x$

(5) $y = \log_4 2x$

(6) $y = \log_2 |3x - 1|$

(7) $y = x^2 \log x - x$

(8) $y = \frac{\log x}{x^2}$

[解]

$$(1) y' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x} "$$

$$(2) y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x "$$

$$(3) y' = 2 \log x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \log x}{x} "$$

$$(4) y' = \frac{1}{x \log 3} "$$

$$(5) y' = \frac{1}{2x \log 4} \cdot 2 = \frac{1}{x \log 4} "$$

$$(6) y' = \frac{1}{(3x-1) \log 2} \cdot 3 = \frac{3}{(3x-1) \log 2} "$$

$$(7) y' = 2x \log x - x^2 \cdot \frac{1}{x} - 1$$

$$= 2x \log x - x - 1 "$$

$$(8) y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \log x \cdot 2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{1 - 2 \log x}{x^3} "$$

10.

I. 次の関数の導関数を求めよ。ただし、 $x > 0$ とする。

(1) $y = x^x$

(2) $y = (\sqrt{x})^x$

(3) $y = x^{\sin x}$

II. α が実数のとき、 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ が成り立つことを示せ。

[解]

I. (1) $y = x^x$ ($x > 0, y > 0$)

両辺底が e の対数をとって

$$\log y = x \log x$$

両辺 x で微分して

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot y' &= 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \log x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore y' &= y (\log x + 1) \\ &= x^x (\log x + 1) \end{aligned}$$

(2) $y = (\sqrt{x})^x = x^{\frac{x}{2}}$ ($x > 0, y > 0$)

両辺対数をとって (底 e)

$$\log y = \frac{x}{2} \log x$$

両辺 x で微分して

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{1}{2} \log x + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{2} (\log x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore y' &= \frac{y}{2} (\log x + 1) \\ &= \frac{(\sqrt{x})^x}{2} (\log x + 1) \end{aligned}$$

(3) $y = x^{\sin x}$ ($x > 0, y > 0$)

両辺対数をとって (底 e)

$$\log y = \sin x \log x$$

両辺 x で微分して

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \log x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore y' &= y \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right) \\ &= x^{\sin x} \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right) \end{aligned}$$

II. $y = x^\alpha$ とおく。 $x = 0$ のとき $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ は成り立つ $x \neq 0$ のとき

$$|y| = |x^\alpha| = |x|^\alpha \leftarrow \begin{array}{l} \text{対数をとりたいので} \\ \text{正になるように絶対値をつける} \end{array}$$

両辺対数をとって (底 e)

$$\log |y| = \alpha \log |x|$$

両辺 x で微分して

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot y' &= \alpha \cdot \frac{1}{x} \\ y' &= \frac{\alpha y}{x} \\ &= \frac{\alpha x^\alpha}{x} \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \quad \square \end{aligned}$$

<point>

① 対数微分法。

11.

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \frac{x^2(x-1)}{(x-2)^3}$

(2) $y = (x-1)^2 \sqrt[3]{x+2}$

[解1]

(1) $y = \frac{x^2(x-1)}{(x-2)^3} \quad (x \neq 2)$

$$|y| = \frac{|x|^2|x-1|}{|x-2|^3}$$

 $x \neq 0, 1$ のとき ($y \neq 0$)

両辺を対数をとって

$$\begin{aligned} \log |y| &= \log \frac{|x|^2|x-1|}{|x-2|^3} \\ &= 2 \log |x| + \log |x-1| - 3 \log |x-2| \end{aligned}$$

両辺 x で微分して

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-2}$$

$$\begin{aligned} \therefore y' &= y \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-2} \right) \\ &= \frac{x^2(x-1)}{(x-2)^3} \cdot \frac{-5x+4}{x(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{-x(5x-4)}{(x-2)^4} \end{aligned}$$

これは $x=0, 1$ でも成り立つ。

注

商の微分法でやれば、 $x=0, 1$ に

関して特に考えなくてもよいので、

 $x=0, 1$ でも成り立つだろう位に考えればよい。実際 y についても、 $x=0, 1$ で微分可能 (とわたり、不連続でない) であるし、 y も $x=0, 1$

で連続なので、値はある。

(2) $y = (x-1)^2 \sqrt[3]{x+2}$

$$|y| = |x-1|^2 |x+2|^{\frac{1}{3}}$$

 $x \neq 1, -2$ のとき ($y \neq 0$)

両辺を対数をとって

$$\begin{aligned} \log |y| &= \log |x-1|^2 |x+2|^{\frac{1}{3}} \\ &= 2 \log |x-1| + \frac{1}{3} \log |x+2| \end{aligned}$$

両辺 x で微分して

$$\frac{1}{y} y' = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{3(x+2)}$$

$$\begin{aligned} \therefore y' &= y \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{3(x+2)} \right) \\ &= (x-1)^2 \sqrt[3]{x+2} \cdot \frac{7x+11}{3(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{(x-1)(7x+11)}{3(x+2)^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

これは $x=-2$ では成り立たないが、 $x=1$ では成り立つ。

注

同様に積の微分法でやれば、 $x=1, -2$

に関して特に考えなくてもよい。ただ結果

として、 $x+2$ が分母にくるので、 $x \neq -2$

[別解]

$$1) y = \frac{x^2(x-1)}{(x-2)^3}$$

$$t = x-2 \text{ とおく } (x = t+2)$$

$$y = \frac{(t+2)^2(t+1)}{t^3} \quad \leftarrow \text{分子の平方に1を2よりおく。}$$

$$= \frac{t^3 + 5t^2 + 8t + 4}{t^3}$$

$$= 1 + 5t^{-1} + 8t^{-2} + 4t^{-3}$$

$$= 1 + 5(x-2)^{-1} + 8(x-2)^{-2} + 4(x-2)^{-3}$$

$$y' = -5(x-2)^{-2} - 16(x-2)^{-3} - 12(x-2)^{-4}$$

$$= \frac{-5(x-2)^2 - 16(x-2) - 12}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{-5x^2 + 4x}{(x-2)^4}$$

$$2) y = (x-1)^2 \sqrt[3]{x+2}$$

$$t = x+2 \text{ とおく } (x = t-2)$$

$$y = (t-3)^2 \sqrt[3]{t} \quad \leftarrow \begin{array}{l} 2 \text{ 乗は展開公式か} \\ \text{あと } t \text{ の } 3 \text{ 乗根の中身} \\ \text{を } t \text{ とおく。} \end{array}$$

$$= (t^2 - 6t + 9)t^{\frac{1}{3}}$$

$$= t^{\frac{7}{3}} - 6t^{\frac{4}{3}} + 9t^{\frac{1}{3}}$$

$$= (x+2)^{\frac{7}{3}} - 6(x+2)^{\frac{4}{3}} + 9(x+2)^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{7}{3}(x+2)^{\frac{4}{3}} - 8(x+2)^{\frac{1}{3}} + 9(x+2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{7(x+2)^2 - 24(x+2) + 9}{3(x+2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{7x^2 + 4x - 11}{3(x+2)^{\frac{2}{3}}} \quad \leftarrow \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{(x-1)(7x+11)}{3(x+2)^{\frac{2}{3}}} \quad (x+2)$$

[別解]

3.3.3 | 1 | 商の微分, 積の微分で解く。

12.

次の関数を微分せよ.

$$(1) y = \frac{(x+4)^2}{(2x-1)^3(3x+2)^4}$$

$$(2) y = \frac{\sqrt{2x+1}(x+5)}{(x-3)^2}$$

[解]

$$(1) y = \frac{(x+4)^2}{(2x-1)^3(3x+2)^4} \quad (x \neq \frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$$

← 置き換えては厳しい.

$$|y| = \frac{|x+4|^2}{|2x-1|^3|3x+2|^4}$$

 $x \neq -4$ のとき

両辺自然対数をとって

$$\log |y| = 2 \log |x+4| - 3 \log |2x-1| - 4 \log |3x+2|$$

両辺 x で微分して

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{x+4} - \frac{3}{2x-1} \cdot 2 - \frac{4}{3x+2} \cdot 3$$

$$y' = y \cdot \frac{2(2x-1)(3x+2) - 6(x+4)(3x+2) - 12(x+4)(2x-1)}{(x+4)(2x-1)(3x+2)}$$

$$= \frac{(x+4)^2}{(2x-1)^3(3x+2)^4} \cdot \frac{-2(15x^2+83x+2)}{(x+4)(2x-1)(3x+2)}$$

$$= \frac{-2(x+4)(15x^2+83x+2)}{(2x-1)^4(3x+2)^5}$$

これは $x = -4$ のときも成り立つ。

$$(2) y = \frac{\sqrt{2x+1}(x+5)}{(x-3)^2} \quad (x \geq -\frac{1}{2})$$

 $x \neq -\frac{1}{2}$ のとき、両辺自然対数をとって

$$\log y = \frac{1}{2} \log(2x+1) + \log(x+5) - 2 \log|x-3|$$

両辺 x で微分して

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot 2 + \frac{1}{x+5} - \frac{2}{x-3}$$

$$y' = y \cdot \frac{(x+5)(x-3) + (2x+1)(x-3) - 2(2x+1)(x-3)}{(2x+1)(x+5)(x-3)}$$

$$= \frac{\sqrt{2x+1}(x+5)}{(x-3)^2} \cdot \frac{-(x-3)(x-4)}{(2x+1)(x+5)(x-3)}$$

$$= -\frac{x-4}{(x-3)^2 \sqrt{2x+1}}$$