1.

次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{3}(x^3+x^2+x+1)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(2\sin t+3\cos t)^2dt$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin 2x dx$

[解]

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{3}(x^3+x^2+x+1)dx$

$\displaystyle =2\int_0^3(x^2+1)dx$

$\displaystyle =2\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^3=24$ //

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(2\sin t+3\cos t)^2dt$

$\displaystyle =\int_{-\pi}^{\pi}(\underset{\text{偶}}{4\sin^2t}+\underset{\text{奇}}{12\sin t\cos t}+\underset{\text{偶}}{9\cos^2t})dt$

$\displaystyle =2\int_0^{\pi}(4\sin^2t+9\cos^2t)dt$

$\displaystyle =2\int_0^{\pi}(4+5\cos^2t)dt$

$\displaystyle =2\int_0^{\pi}\left(4+5\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$

$\displaystyle =\int_0^{\pi}(13+5\cos 2t)dt$

$\displaystyle =\left[13t+5\cdot\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi}=13\pi$ //

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\underset{\text{奇}}{x^2\sin 2x}\,dx$

$=0$ //

注.

$f(x)$：奇関数のとき

$y=f(x)$ のグラフは原点対称

$f(x)$：偶関数のとき

$y=f(x)$ のグラフは y 軸対称

これがイメージできれば①は容易に分かる

〈point〉

① 奇関数・偶関数の積分

(1) $f(x)$ が奇関数 $(f(-x)=-f(x))$ のとき

$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

(2) $f(x)$ が偶関数 $(f(-x)=f(x))$ のとき

$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

[証明]

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$

$\displaystyle I=\int_{-a}^{0}f(x)dx$ とおく

$x=-t$ とおくと

$\begin{cases} x: -a\to 0 \\ t: a\to 0\end{cases}$

$\displaystyle\frac{dx}{dt}=-1$

$\displaystyle I=\int_a^0 f(-t)(-1)dt$

$\displaystyle =\int_0^a -f(t)dt=-\int_0^a f(t)dt$

よって　　$\displaystyle\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx$

$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=0$ □

(2) 同様.

② (1) 奇関数 × 奇関数 ＝ 偶関数

(2) 奇関数 × 偶関数 ＝ 奇関数

(3) 偶関数 × 偶関数 ＝ 偶関数

[証明]

(1) $f(x)$：奇関数，$g(x)$：奇関数のとき

$f(-x)g(-x)=-f(x)\cdot\{-g(x)\}$

$=f(x)g(x)$

よって $f(x)g(x)$ は偶関数 □

(2). (3) 同様.

2.

(1) $x=\pi-t$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ の値を求めよ．

(2) $f(x)$ が $0\leqq x\leqq 1$ で連続な関数であるとき

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

が成立することを示し，これを用いて定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$ を求めよ.

((1) 山梨大　(2) 信州大)

[解]

(1) $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ とおく

$x=\pi-t$ とおく

$\begin{cases} x: 0\to\pi \\ t: \pi\to 0 \end{cases}$

$\frac{dx}{dt}=-1$

$I=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\cdot(-1)dt$

$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$

$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}-I$

$\therefore I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$

ここで

$J=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$ とおく

$u=\cos t$ とおくと

$\begin{cases} t: 0\to\pi \\ u: 1\to -1 \end{cases}$

$\frac{dt}{du}=\frac{1}{\frac{du}{dt}}=-\frac{1}{\sin t}$

$J=\int_1^{-1}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\cdot\left(-\frac{1}{\sin t}\right)du$

$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+u^2}du=2\int_0^1\frac{1}{1+u^2}du$ ←偶

$u=\tan\theta$ とおくと

$\begin{cases} u: 0\to 1 \\ \theta: 0\to\frac{\pi}{4} \end{cases}$

$\frac{du}{d\theta}=1+\tan^2\theta$

$J=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cancel{1+\tan^2\theta}}\cdot(\cancel{1+\tan^2\theta})d\theta$

$=2\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}$

よって

$I=\frac{\pi^2}{4}$。

(2) $I=\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx$ とおく

$x=\pi-t$ とおく

$\begin{cases} x: 0\to\pi \\ t: \pi\to 0 \end{cases}$

$\frac{dx}{dt}=-1$

$I=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)(-1)dt$

$=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt$

$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)dt-I$

$\therefore I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$ □.

$f(x)=\frac{x}{3+x^2}$ は $0\leqq x\leqq 1$ で連続であるから

$J=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$

$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx$

$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx$

あとは(1)と同様にして

$=\frac{\pi}{4}\log 3$。

〈point〉

① 置換によって積分できる形に変形.

3.

(1) 連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi - x) = f(x)$ を満たすとき，$\displaystyle\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x)dx = 0$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$ を求めよ．

（名古屋大）

[解]

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x)\,dx$$

$I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x)\,dx$ とおく

$x = \pi - t$ とおくと

$x : \dfrac{\pi}{2} \to \pi$

$t : \dfrac{\pi}{2} \to 0$

$\dfrac{dx}{dt} = -1$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) f(\pi - t)\cdot(-1)\,dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(t - \frac{\pi}{2}\right) f(t)\,dt$$

よって

$\displaystyle\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x)\,dx$$

$= 0$ □

(2) $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx$ とおく

$f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}$ とおくと

$f(\pi - x) = f(x)$ より

$$\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx = 0$$

$$J = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx$$

$u = \cos x$ とおくと

$x : 0 \to \pi$

$u : 1 \to -1$

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dx}} = -\frac{1}{\sin x}$$

$$J = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{\sin^{\cancel{3}\,2} x}{4-\cos^2 x}\left(-\frac{1}{\sin x}\right) du$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1-u^2}{4-u^2}\,du$$

$$= \pi\int_0^1 \left(1 + \frac{3}{u^2-4}\right) du$$

$$= \pi\Big(\underbrace{\int_0^1 1\,du}_{J_1} + 3\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{u^2-4}\,du}_{J_2 \text{ とおく}}\Big)$$

$J_1 = 1$

$$J_2 = \int_0^1 \frac{1}{u^2-4}\,du$$

$$\frac{1}{u^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right)$$

$$J_2 = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right) du$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\log|u-2| - \log|u+2|\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{u-2}{u+2}\right|\right]_0^1$$

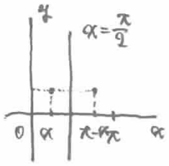
$$= \frac{1}{4}\log\frac{1}{3} = -\frac{1}{4}\log 3$$

よって

$$J = \pi\left(1 - \frac{3}{4}\log 3\right)$$ //

〈point〉

① $f(\pi-x)=f(x)$ のとき



$y=f(\pi-x)$ と $y=f(x)$ は

$x=\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称

であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx$$

になるだろうと着想し積分を

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ に分ける。

$x=\pi-t$ とおくのも、$x=\dfrac{\pi}{2}$ に関して

対称というところから発想する

4.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin x}{1+\cos x}+\frac{x\cos x}{1+\sin x}\right)dx$$ とおく.

(1) 等式 $I=\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)dx$ を示せ.

(2) I の値を求めよ. (大阪市立大)

[解]

(1)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin x}{1+\cos x}+\frac{x\cos x}{1+\sin x}\right)dx$$

$x=\frac{\pi}{2}-t$ とおくと

$$\begin{cases} x:0\to\frac{\pi}{2}\\ t:\frac{\pi}{2}\to 0\end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt}=-1$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{(\frac{\pi}{2}-t)\cos t}{1+\sin t}+\frac{(\frac{\pi}{2}-t)\sin t}{1+\cos t}\right)(-1)\,dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{1+\cos t}+\frac{\cos t}{1+\sin t}\right)dt-I$$

$$2I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)dx$$

$$\therefore I=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\underbrace{\frac{\sin x}{1+\cos x}}_{I_1}+\underbrace{\frac{\cos x}{1+\sin x}}_{I_2}\Big)dx \quad □$$

I_1, I_2 とおく

(2)

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}dx$$

$$=-\Big[\log|1+\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\log 2$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}dx$$

$$=\Big[\log|1+\sin x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\log 2$$

よって

$$I=\frac{\pi}{2}\log 2 \;//$$

〈point〉

① $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ と $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ は $\sin x$ と $\cos x$ を入れ替えただけなので $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおく.

5.

(1) 関数 $f(x)$ は常に $f(x)=f(-x)$ を満たす．このとき，

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$$ となることを示せ．

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+e^{-x}}dx$ を計算せよ．

（福島大）

[解]

(1) $$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx$$

ここで

$I=\displaystyle\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx$ とおく

$x=-t$ とおくと

$$\begin{cases} x:-a\to 0 \\ t: a\to 0 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt}=-1$$

$$I=\int_{a}^{0}\frac{f(-t)}{1+e^{t}}\cdot(-1)dt$$
$$=\int_{0}^{a}\frac{f(t)}{1+e^{t}}dt$$

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{x}}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx$$
$$=\int_{0}^{a}\left(\frac{e^{-x}f(x)}{1+e^{-x}}+\frac{f(x)}{1+e^{-x}}\right)dx$$
$$=\int_{0}^{a}f(x)dx \ \square.$$

(2) $f(x)=x\sin x$ とおくと

$f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=f(x)$ より

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+e^{-x}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$
$$=\Big[-x\cos x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx \qquad \begin{matrix} f:-\cos x & g: x \\ f':\sin x & g': 1 \end{matrix}$$
$$=\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1 \,/\!/$$

6.

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx,\ I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ とおく.

(1) $I_1 + I_2$ を求めよ.

(2) $I_1 = I_2$ が成り立つことを示し，その値を求めよ.

[解]

(1) $I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx$

$= \left[x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ //

(2) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

$x = \frac{\pi}{2} - t$ とおく

$x : 0 \to \frac{\pi}{2}$

$t : \frac{\pi}{2} \to 0$

$\frac{dx}{dt} = -1$

$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} \cdot (-1) dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt = I_2$

$I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}$ より

$2I_1 = \frac{\pi}{2}$ $\quad \therefore I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4}$ //

7.

$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とおく．

$I_n + I_{n+1}$ を n の式で表すと$\boxed{}$である．$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = a_n I_0 + b_n I_n$ とおくと，$a_n = \boxed{}$，$b_n = \boxed{}$である．(芝浦工業大)

［解］

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n\cancel{(1+x)}}{\cancel{1+x}}dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= (I_0 + \cancel{I_1}) - (\cancel{I_1} + \cancel{I_2}) + (\cancel{I_2} + \cancel{I_3}) - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1}(\cancel{I_{n-1}} + I_n)$$

$$= I_0 + (-1)^{n-1} I_n$$

よって

$a_n = \boxed{1}$，$b_n = \boxed{(-1)^{n-1}}$

8.

n を自然数とする．$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx = \frac{\pi}{2}$ を示せ．（東京工業大）

[解]

$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$ とおく $(n \in \mathbb{N})$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+3)x - \sin(2n+1)x}{\sin x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(2n+2)x\sin x}{\sin x}dx \leftarrow \text{和積}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2(n+1)x\,dx$$

$$= 2\left[\frac{\sin 2(n+1)x}{2(n+1)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$\therefore I_{n+1} = I_n$

よって

$$I_n = I_{n-1} = \cdots = I_2 = I_1$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 4\sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2x)dx$$

$$= \left[x + \cancel{2}\cdot\frac{\sin 2x}{\cancel{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

よって

$$I_n = \frac{\pi}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$ //

〈point〉

① そのままではどうにもならないので階差を作る．