

1.

グラフを利用して、次の方程式を解け。

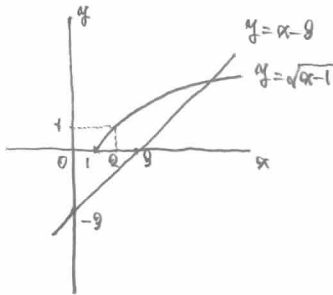
(1) $\sqrt{x-1} = x-3$

(2) $\sqrt{3-x} = x+1$

[解]

(1) $\sqrt{x-1} = x-3$

の解は $y = \sqrt{x-1}$ と $y = x-3$ の交点の x 座標に等しい。



$y = \sqrt{x-1}$ と $y = x-3$ の交点は

$$\sqrt{x-1} = x-3$$

$$x-1 = (x-3)^2$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

図より $x=5$ ($x=2$ は解ではない。(無解))

[別解]

$$\sqrt{x-1} = x-3 \quad (x \geq 3) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \sqrt{x-1} \geq 0 \text{ より } x-3 \geq 0 \\ \text{これは、これはいい} \end{array}$$

$$x-1 = (x-3)^2, \quad x \geq 3 \quad \text{両辺}$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

$$x \geq 3 \text{ より } x=5$$

(2) $\sqrt{3-x} = x+1 \quad (x \geq -1)$

$$3-x = (x+1)^2, \quad x \geq -1$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x \geq -1 \text{ より } x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

<point>

① $a=b$ と $a^2=b^2$ は同値ではない。

$$a=b \Rightarrow a^2=b^2$$

$\rightarrow$ は真だが $\leftarrow$ は偽

反例. $a=-1, b=1$.

ただし、「 $a \geq 0, b \geq 0$ 」か「 $a \leq 0, b \leq 0$ 」という条件が加われば $\leftarrow$ も真となり

$a=b$ と $a^2=b^2$ は同値である。

$$\sqrt{x-1} = x-3 \text{ について}$$

$\sqrt{x-1} \geq 0$ であるから $x-3$ は負の値をとるため

$$\frac{0}{x} \quad x-1 = (x-3)^2 \quad (\text{同値ではない})$$

$\sqrt{x-1} \geq 0$ であるから 等号が成り立つ

ためには $x-3 \geq 0 \quad x \geq 3$ として

$$\frac{0}{x} \quad x-1 = (x-3)^2, \quad x \geq 3 \quad (\text{同値})$$

② 無解について

$$x-1 = (x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \text{ のとき } \sqrt{x-1} = x-3 \\ -1 \leq x < 3 \quad -\sqrt{x-1} = x-3 \dots \textcircled{1} \end{cases}$$

$-\sqrt{x-1} = x-3$ も両辺2乗すれば

$$x-1 = (x-3)^2 \text{ となる}$$

①を解けば $x=2$ が出てくる

2.

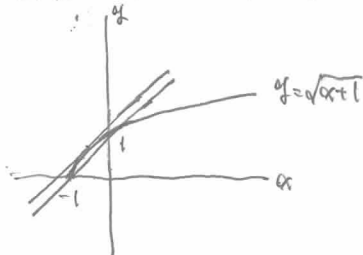
- (1) 方程式 $\sqrt{x+1} - x - k = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ。
 (2) 曲線 $y = \sqrt{x-1}$ と直線 $y = ax+1$ の共有点の個数を調べよ。
 (3) 2つの関数 $y = a|x-1| - a$ と $y = \sqrt{x}$ のグラフが、3つの異なる共有点をもつための実数 a の条件を求めよ。
 (4) 方程式 $\sqrt{x+2} = x + |x-a|$ が相異なる2つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。 ((3) 法政大 (4) 杏林大)

[解]

$$(1) \sqrt{x+1} - x - k = 0$$

$$\sqrt{x+1} = x+k \quad \dots \textcircled{1}$$

①の実数解の個数は $y = \sqrt{x+1}$ と $y = x+k$ の共有点の個数に等しい。



$y = \sqrt{x+1}$ と $y = x+k$ が接するとき

$$\sqrt{x+1} = x+k$$

$$x+1 = (x+k)^2$$

$$x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$$

この判別式を D として

$$D = (2k-1)^2 - 4(k^2-1)$$

$$= -4k+5 = 0 \quad \therefore k = \frac{5}{4}$$

グラフより

$k < -1$ のとき 1個

$-1 \leq k < \frac{5}{4}$ " 2個

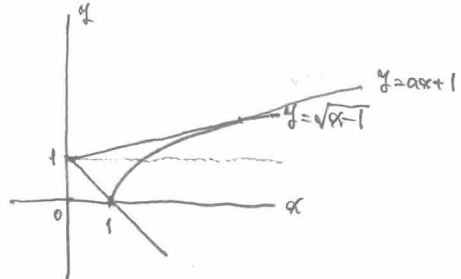
$k = \frac{5}{4}$ " 1個

$k > \frac{5}{4}$ " 0個

注

解の配置で解いてもよいが、グラフを利用した方が楽。

(2)



$y = \sqrt{x-1}$ と $y = ax+1$ が接するとき

$$\sqrt{x-1} = ax+1$$

$$x-1 = (ax+1)^2$$

$$a^2x^2 + (2a-1)x + 2 = 0$$

この判別式を D として

$$D = (2a-1)^2 - 8a^2$$

$$= -4a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$4a^2 + 4a - 1 = 0 \quad \therefore a = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

グラフより

$a < -1$ のとき 0個

$-1 \leq a \leq 0$ " 1個

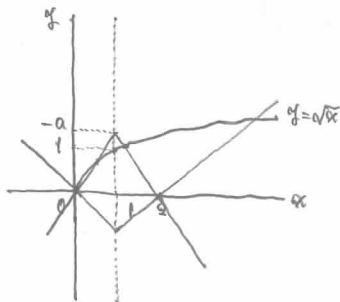
$0 < a < \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ " 2個

$a = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ " 1個

$a > \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ " 0個

$$3) y = a|x-1| - a$$

$$= \begin{cases} a(x-1) - a & (x \geq 1) \\ -a(x-1) - a & (x < 1) \end{cases}$$



$y = -a(x-1) - a$ と x 軸との交点は

$$-a(x-1) - a = 0$$

$$-(x-1) - 1 = 0 \quad \therefore x = 0$$

$y = a(x-1) - a$ と x 軸との交点は

$$a(x-1) - a = 0$$

$$(x-1) - 1 = 0 \quad \therefore x = 2$$

$y = \sqrt{x}$ の $x=0$ における接線は $x=0$

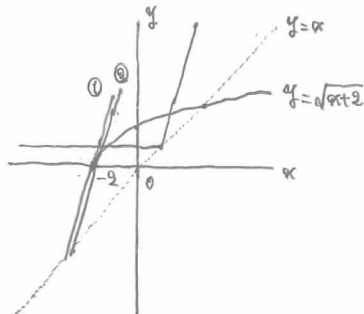
よって $y = a|x-1| - a$ と $y = \sqrt{x}$ が 3 つの異なる共有点をもつためには

$$a < -1$$

4) $\sqrt{x+2} = x + |x-a|$ が相異なる 2 つの実数解をもつためには $y = \sqrt{x+2}$ と $y = x + |x-a|$ が異なる 2 つの共有点をもてばよい。

$$y = x + |x-a|$$

$$= \begin{cases} 2x-a & (x \geq a) \\ a & (x < a) \end{cases}$$



$y = \sqrt{x+2}$ と $y = x$ の交点は

$$\sqrt{x+2} = x$$

$$x+2 = x^2, \quad x \geq 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad (x+1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = 2$$

① $y = \sqrt{x+2}$ と $y = 2x-a$ が接するとき

$$\sqrt{x+2} = 2x-a$$

$$x+2 = (2x-a)^2$$

$$4x^2 - (4a+1)x + a^2 - 2 = 0$$

この判別式を D とすると

$$D = (4a+1)^2 - 16(a^2-2)$$

$$= 8a+9 \quad \therefore a = -\frac{9}{8}$$

② $y = 2x-a$ が $(-2, 0)$ を通るとき

$$0 = -4-a \quad \therefore a = -4$$

よって $\sqrt{x+2} = x + |x-a|$ が相異なる 2 つの

実数解をもつためには

$$-\frac{9}{8} < a \leq -4, \quad 0 \leq a < 2$$

1.

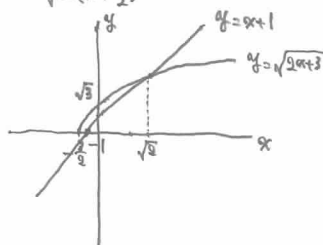
グラフを利用して、次の不等式を解け.

(1) $\sqrt{2x+3} > x+1$

(2) $\sqrt{5-x} < x+1$

【解】

$$\begin{aligned} \text{① } y &= \sqrt{2x+3} \\ &= \sqrt{2\left(x+\frac{3}{2}\right)} \end{aligned}$$

 $y = \sqrt{2x+3}$ と $y = x+1$ の交点は

$$\sqrt{2x+3} = x+1 \quad (x \geq -1)$$

$$2x+3 = (x+1)^2, \quad x \geq -1$$

$$x^2 - 2 = 0$$

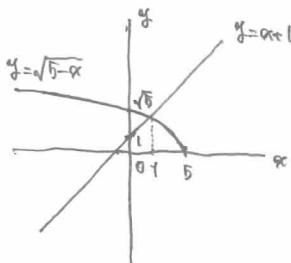
$$x \geq -1 \text{ より } x = \sqrt{2}$$

よって

$$-\frac{1}{2} \leq x < \sqrt{2}$$

② $\sqrt{5-x} < x+1$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{5-x} \\ &= \sqrt{-(x-5)} \end{aligned}$$

 $y = \sqrt{5-x}$ と $y = x+1$ の交点は

$$\sqrt{5-x} = x+1 \quad (-1 \leq x \leq 5)$$

$$5-x = (x+1)^2, \quad -1 \leq x \leq 5$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x+4)(x-1) = 0$$

$$-1 \leq x \leq 5 \text{ より } x = 1$$

よって

$$1 < x \leq 5$$

<point>

① $a > b$ と $a^2 > b^2$ も同値ではない.

$$\sqrt{2x+3} > x+1 \text{ は}$$

不等式の場合は $x+1 < 0$ のときも

考えなければならぬので、単純に両辺

を2乗して解くわけにはいかない

→ グラフを利用.

$$\sqrt{5-x} < x+1 \text{ は}$$

 $\sqrt{5-x} \geq 0$ であるから、この不等式を満たすx に対しては $x+1 \geq 0$ が成り立つので、 $\sqrt{5-x} < (x+1)^2$ を解いても解は

求まる. (同値)

$$\left(\begin{array}{l} a > b, \text{ と } a^2 > b^2 \text{ は } \left[\begin{array}{l} a \geq 0, b \geq 0 \end{array} \right] \text{ であれば} \\ \text{同値} \end{array} \right.$$

2.

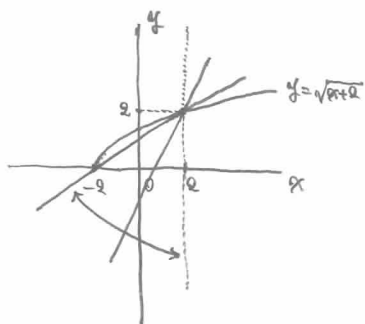
(1) x に関する不等式 $\sqrt{x+2} > ax+b$ の解が $-2 \leq x < 2$ となるような正の数 a, b の和 $a+b$ のとりうる値の範囲を求めよ.

(2) 正の定数 a, b に対し, 不等式 $\sqrt{b-x} \leq x-a$ の解が, $2 \leq x \leq 3$ であるとき, a の値を求めよ.

((1) 防衛医大)

[解]

(1) $\sqrt{x+2} > ax+b$



解 $-2 \leq x < 2$ となるためには

$y = ax+b$ が $(2, 2)$ を通り $b >$

$$a > \frac{1}{2} \quad (\text{傾き})$$

$y = ax+b$ が $(2, 2)$ を通るとき

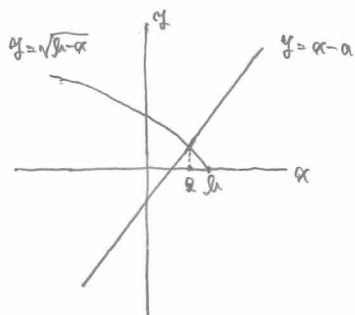
$$2a+b=2 \quad \therefore b=2-2a$$

$$a+b = -a+2 < \frac{3}{2}$$

(2) $\sqrt{b-x} \leq x-a$

$$y = \sqrt{b-x}$$

$$= \sqrt{-(x-b)}$$



解 $2 \leq x \leq 3$ となるためには

$$b=3$$

このとき $x=2$ のとき $y=1$

$y = x-a$ が $(2, 1)$ を通るから

$$1 = 2-a \quad \therefore a=1$$

1.

次の不等式を解け.

(1) $\sqrt{2-x^2} > 2x+1$

(2) $\sqrt{4-x^2} \geq 2(x-1)$

(3) $\sqrt{4x-x^2} > 3-x$

(4) $\sqrt{7x-3} \leq \sqrt{-x^2+5x}$

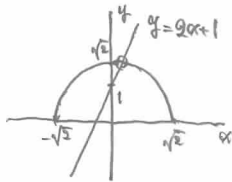
(2) 神戸商船大 (3) 学習院大 (4) 大阪薬科大

[解]

(1) $y = \sqrt{2-x^2} \ (y \geq 0)$

$y^2 = 2-x^2, \ y \geq 0$

$x^2 + y^2 = 2, \ y \geq 0$

中心(0,0). 半径 $\sqrt{2}$ の円の $y \geq 0$ の部分 $x^2 + y^2 = 2, \ y \geq 0$ と $y = 2x+1$ の交点は

$x^2 + (2x+1)^2 = 2, \ x \geq -\frac{1}{2}$

$5x^2 + 4x - 1 = 0 \quad \wedge \ y \geq 0 \text{ より}$

$(x+1)(5x-1) = 0$

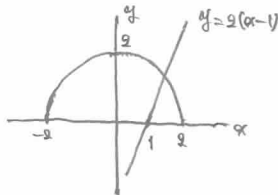
$x \geq -\frac{1}{2} \text{ より } x = \frac{1}{5}$

よって $-\sqrt{2} \leq x < \frac{1}{5}$

(2) $y = \sqrt{4-x^2}$

$y^2 = 4-x^2, \ y \geq 0$

$x^2 + y^2 = 4, \ y \geq 0$

中心(0,0). 半径2の円の $y \geq 0$ の部分 $x^2 + y^2 = 4, \ y \geq 0$ と $y = 2(x-1)$ の交点は

$x^2 + 4(x-1)^2 = 4, \ x \geq 1$

$5x^2 - 8x = 0$

$x(5x-8) = 0$

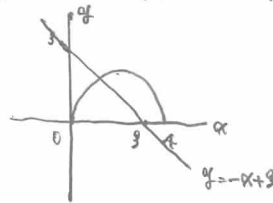
$x \geq 1 \text{ より } x = \frac{8}{5}$

よって $-2 \leq x \leq \frac{8}{5}$

(3) $y = \sqrt{4x-x^2}$

$y^2 = 4x-x^2, \ y \geq 0$

$(x-2)^2 + y^2 = 4, \ y \geq 0$

中心(2,0). 半径2の円の $y \geq 0$ の部分 $y^2 = 4x-x^2, \ y \geq 0$ と $y = 3-x$ の交点は

$(3-x)^2 = 4x-x^2, \ x \leq 3$

$2x^2 - 10x + 9 = 0$

$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$

$x \leq 3 \text{ より } x = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$

よって $\frac{5-\sqrt{7}}{2} \leq x \leq 4$

(4) $\sqrt{7x-3} \leq \sqrt{-x^2+5x} \quad \left(\frac{3}{7} \leq x \leq 5\right)$

$7x-3 \leq -x^2+5x \quad \leftarrow \sqrt{7x-3} \geq 0, \sqrt{-x^2+5x} \geq 0$

$x^2 + 2x - 3 \leq 0$

$(x+3)(x-1) \leq 0$

$\frac{3}{7} \leq x \leq 5 \text{ より } \frac{3}{7} \leq x \leq 1$

2.

(1) 不等式 $\sqrt{a^2 - x^2} > 3x - a$ ($a \neq 0$) を解け.(2) 不等式 $\sqrt{a^2 - x^2} > ax - a$ ($a \neq 0$) を解け.(3) 方程式 $\sqrt{2x - x^2} = 2a(x - 1 - \sqrt{2})$ が異なる2つの実数解をもつための定数 a の範囲を求めよ.

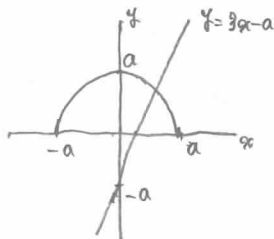
((1) 芝浦工業大 (2) 旭川医大 (3) 早稲田大)

[解]

$$(1) y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y^2 = a^2 - x^2, y \geq 0$$

$$x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$$

中心: $(0, 0)$, 半径 $|a|$ の $y \geq 0$ の部分i) $a > 0$ のとき $x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$ と $y = 3x - a$ の交点は

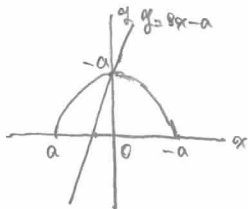
$$x^2 + (3x - a)^2 = a^2, x \geq \frac{a}{3}$$

$$10x^2 - 6ax = 0$$

$$x(5x - 3a) = 0$$

$$x \geq \frac{a}{3} \text{ より } x = \frac{3}{5}a$$

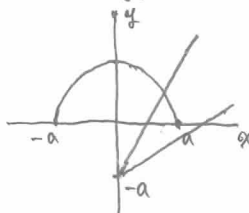
$$\text{よって } -a \leq x < \frac{3}{5}a$$

ii) $a < 0$ のときグラフより $a \leq x < 0$

$$(2) y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y^2 = a^2 - x^2, y \geq 0$$

$$x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$$

中心 $(0, 0)$, 半径 $|a|$ の $y \geq 0$ の部分i) $a > 0$ のとき

$$y = ax - a$$

ii) $0 < a \leq 1$ のとき

$$-a \leq x \leq a$$

iii) $a > 1$ のとき $x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$ と $y = ax - a$ の交点は

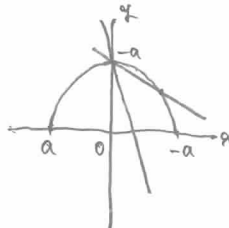
$$x^2 + (ax - a)^2 = a^2, x \geq 1$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 2a^2x = 0$$

$$x\{(a^2 + 1)x - 2a^2\} = 0$$

$$x \geq 1 \text{ より } x = \frac{2a^2}{a^2 + 1}$$

$$\text{よって } -a \leq x < \frac{2a^2}{a^2 + 1}$$

iv) $a < 0$ のときv) $a < -1$ のとき

$$0 < x \leq -a$$

vi) $-1 \leq a < 0$ のとき

$$0 < x < \frac{2a^2}{a^2 + 1}$$

$$(3) \ y = \sqrt{2x - x^2} \ (y \geq 0)$$

$$y^2 = 2x - x^2, \ y \geq 0$$

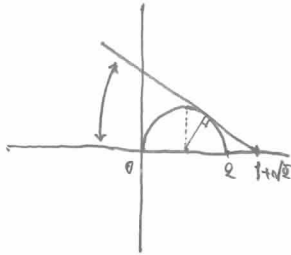
$$(x-1)^2 + y^2 = 1, \ y \geq 0$$

中心 $(1, 0)$. 半径 1 の円の $y \geq 0$ の部分.

$$y = 2a(x - 1 - \sqrt{2})$$

$$= 2a\{x - (1 + \sqrt{2})\}$$

$(1 + \sqrt{2}, 0)$ を通り、傾き $2a$ の直線.



$(x-1)^2 + y^2 = 1, \ y \geq 0$ と $y = 2a\{x - (1 + \sqrt{2})\}$ が接するとき

$$\frac{|-2\sqrt{2}a|}{\sqrt{4a^2 + 1}} = 1, \ a < 0$$

$$|-2\sqrt{2}a| = \sqrt{4a^2 + 1}$$

$$8a^2 = 4a^2 + 1$$

$$a^2 = \frac{1}{4}$$

$$a < 0 \text{ より } a = -\frac{1}{2}$$

よって $\sqrt{2x - x^2} = 2a(x - 1 - \sqrt{2})$ が異なる

2つの実数解をもつためには

$$-\frac{1}{2} < a < 0$$