

4.

I. 不定積分 $I = \int \sqrt{1+x^2} dx$ を, $\sqrt{1+x^2} + x = t$ とおいて求める
と, $I = \boxed{\quad}$ である. (慶応大)

II. $x = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ とする.

(1) $\frac{dx}{dt}$ と t で表せ.

(2) t を x で表せ.

(3) 不定積分 $\int e^t dx$ をまず t で表し, 次いで x で表せ.

(4) 上記を利用して, 不定積分 $\int \sqrt{1+x^2} dx$ を x で表せ.

(東京理科大)

$$I. I = \int \sqrt{1+x^2} dx$$

$$\sqrt{1+x^2} + x = t \text{ とおく}$$

$$\sqrt{1+x^2} = t - x \leftarrow \text{左辺} > 0 \text{ から右辺} > 0$$

$$1+x^2 = (t-x)^2 \leftarrow \text{両辺} \quad A>0, B>0 \text{ のとき}$$

$$A>B \Leftrightarrow A^2>B^2$$

$$1+x^2 = t^2 - 2tx + x^2$$

$$t=0 \text{ のとき}$$

$$2tx = t^2 - 1$$

$$\text{左辺} = 0, \text{右辺} = -1$$

$$\therefore x = \frac{t^2 - 1}{2t} = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \quad (t \neq 0)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right)$$

$$\sqrt{1+x^2} = t - x = t - \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$$

$$I = \int \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{t^2}{2} + 2 \log |t| - \frac{1}{2t^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{2} \log |t|$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \log (\sqrt{1+x^2} + x) + C$$

(C: 積分定数)

$$* x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$$

$$y = \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \text{ 以上}$$

双曲線の媒介変数表示.

$$II. (1) x = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

$$(2) 2x = e^t - e^{-t}$$

$$e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0 \leftarrow \text{両辺 } e^t \text{ をかけた}$$

$$(e^t)^2$$

$$e^t = x \pm \sqrt{x^2 + 1} \leftarrow \text{解の公式} \quad (e^t > 0)$$

両辺自然対数をとって

$$t = \log (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$(3) \int e^t dx = \int e^t \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int (e^{2t} + 1) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2t}}{2} + t \right) + C$$

$$= \frac{1}{4} (e^t)^2 + \frac{1}{2} t + C$$

$$= \frac{1}{4} (x + \sqrt{x^2 + 1})^2 + \frac{1}{2} \log (x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$$

$$(4) \int \sqrt{1+x^2} dx$$

$$x = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \text{ とおく}$$

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^t - e^{-t})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(e^t + e^{-t})^2} = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

$$= \int \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \cdot dx$$

ここへ

$$\begin{aligned}\int e^{-t} d\alpha &= \int e^{-t} \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) dt \\ &= \frac{1}{2} \int (1 + e^{-2t}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t - \frac{e^{-2t}}{2} \right) + C \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{4} (e^{-t})^2 + C\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2} dx &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} (e^t)^2 + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} (e^{-t})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) \cdot \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) + t \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{x^2+1}) \right\} + C''\end{aligned}$$

<point>

- ① $y = \sqrt{1+x^2}$ は
 $y^2 = 1+x^2$, $y \geq 0$
 $x^2 - y^2 = -1$ (双曲線) の $y \geq 0$ (上半分) の
 部分を表す
- ② 誘導なしで出ることはほぼないと思っ
 ても、双曲線から求む面積は
 このような方法を利用して求める

5.

(1) 関数 $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ を微分せよ.(2) 定積分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ の値を求めよ.

(横浜市立大)

[解]

(1) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ とおく

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' \\
 &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) \\
 &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx &= [\log(x + \sqrt{x^2 + 1})]_1^{\sqrt{3}} \\
 &= \log(\sqrt{3} + 2) - \log(1 + \sqrt{2}) \\
 &= \log \frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

6.

$\tan \frac{\theta}{2} = x$ において, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta}$ を求めよ. (芝浦工業大)

[解]

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta} \text{ とおく}$$

$$x = \tan \frac{\theta}{2} \text{ とおく}$$

$$\sin \theta = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$x: 0 \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{2}{1+x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$$

$$= [\log |x+1|]_0^1 = \log 2$$

<point>

① 三角関数の積分の最終手段として
何の媒介変数を利用する.

7.

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{dx}{\sin x}$

(2) $\int \frac{dx}{\cos x}$

[解]

(1) $I = \int \frac{dx}{\sin x}$ とおく。

$t = \tan \frac{x}{2}$ とおくと $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{2}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2}{1+t^2}$

$I = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$

$= \log |t|$

$= \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C, \dots \textcircled{1}$

(2) $I = \int \frac{dx}{\cos x}$ とおく

$t = \tan \frac{x}{2}$ とおくと $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$I = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$

$= -2 \int \frac{1}{t^2-1} dt$

$= -\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$

$= -(\log |t-1| - \log |t+1|)$

$= \log \left| \frac{t+1}{t-1} \right|$

$= \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 1} \right| + C, \dots$

 $t = \cos x$ とおく

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = -\frac{1}{\sin x}$

$I = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} \left(-\frac{1}{\sin x} \right) dt$

$= \int \frac{1}{t^2-1} dt$

$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$

$= \frac{1}{2} (\log |t-1| - \log |t+1|)$

$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1-t}{1+t} \right|$

$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + C, \dots \textcircled{2}$

注,

$\left| \tan \frac{x}{2} \right| = \left| \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right|$

$= \frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} \leftarrow \text{半角}$

$= \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$

$= \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad \text{よ}$

$\textcircled{1} = \textcircled{2}$

[別解]

(1) $I = \int \frac{dx}{\sin x}$ とおく

$= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx$

$= \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx$

8.

$\frac{1}{(1-t^2)^2}$ を部分分数に分解すると

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{\boxed{}}{(1-t)^2} + \frac{\boxed{}}{1-t} + \frac{\boxed{}}{(1+t)^2} + \frac{\boxed{}}{1+t} \text{ となる.}$$

また、積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x}$ の値は $\boxed{}$ である.

(東京理科大)

[解]

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{a}{(1-t)^2} + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{(1+t)^2} + \frac{d}{1+t} \quad \text{とおく}$$

分母を払

$$1 = a(1+t)^2 + b(1-t)(1+t)^2 + c(1-t)^2 + d(1-t)(1+t) \quad \dots \textcircled{1}$$

が恒等式となるように、 a, b, c, d を定めればよい.

いま $t = \pm 1$ であるが、右辺は3次式であり、3次式は実数全体で連続なので、 $t = \pm 1$ で連続となるような値があると仮定して a, b, c, d を定めても、

① が恒等式となるように a, b, c, d を定められる
 $t = 1$ のとき $4a = 1$
 $t = -1$ のとき $4c = 1$ ($t = \pm 1$ において)

$$t = 0 \text{ のとき } a + b + c + d = 1$$

$$t = 2 \text{ のとき } 9a - 6b + c + 9d = 1$$

よって

$$a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{4} \quad \text{+分母は}$$

このとき $t = \pm 1$ 以外の任意の t で

① は成り立つ

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x}$$

$t = \sin x$ とおくと

$$\begin{cases} x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ t: 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{1}{\cos x}$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\cos^3 x} \cdot \frac{1}{\cos x} dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(\cos^2 x)^2} dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1 - \sin^2 x)^2} dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1 - t^2)^2} dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1-t} - \log|1-t| - \frac{1}{1+t} + \log|1+t| \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \frac{2t}{1-t^2} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{4} (\log(3+2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2})$$

<point>

② 部分分数分解で通分して係数比較でもよいが面倒なので、 $t = \pm 1$ の扱いについて注意は必要だが、般便代入法で解いた。

① $\sin x, \cos x$ の奇乗乗の積分はそれぞれ $t = \cos x, t = \sin x$ (相方) と置換してもできる (これも定石)。↖